

Initialkategorien

Manfred Wischnewsky

'972

I n i t i a l k a t e g o r i e n

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der
Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Manfred Wischnewsky
aus München

Februar 1972



1. Berichterstatter : Prof. Dr. U. Oberst

2. Berichterstatter : Prof. Dr. F. Kasch

Tag der mündlichen Prüfung : 24.05.1972

Initialkategorien

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	I
Kap. I : Initialkategorien	
§ 1. Initialkategorien über beliebigen Kategorien	1
§ 2. Charakterisierung von Initialkategorien	4
§ 3. Initialerbliche Eigenschaften	12
§ 4. Unterkategorien von Initialkategorien und ihre Charakterisierung	18
4.1. Reflektive Unterkategorien	18
4.2. Coreflektive Unterkategorien	21
4.3. Initialunterkategorien	23
Kap. II : Partielle Algebren in Initialkategorien	
§ 1. Partielle Algebren in beliebigen Kategorien	32
§ 2. Universell-algebraische Kategorien	33
§ 3. Partielle Algebren in Initialkategorien	36
§ 4. Partielle Algebren in Unterkategorien von Initialkategorien	43
§ 5. Gleichungsdefinierte Algebren in Initialkategorien	46
§ 6. Gleichungsdefinierte Coalgebren in Initialkategorien	51
Literaturverzeichnis	

Einleitung

In der kategorischen universellen Algebra über der Kategorie Me der Mengen - dem Pendant zur universellen Algebra im Birkhoffschen Sinn - kennt man einige ~~zentrale~~ Sätze, aus denen man im wesentlichen sämtliche, von der klassischen Theorie her bekannten Sätze und Konstruktionen gewinnen kann.

So erhält man z.B. aus dem Satz:

"Jeder algebraische Funktor ist adjungiert" ,
 unter anderem die Existenz von Tensoralgebren, Grundring-
 erweiterungen, Kommutatorfaktorgruppen, Polynomalgebren,
 von universellen Einhüllenden von Lie- oder Jordanalgebren,
 oder die Existenz von freien Algebren (freie Gruppe, Ringe,
 Liealgebren ...).

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit waren folgende, schon seit langem gestellte Fragen :

1. Gelten die zentralen Sätze der klassischen universellen Algebra auch dann noch, wenn man die Basiskategorie Me durch andere geeignete Kategorien ersetzt,
 d.h. wenn man z.B. topologische, meßbare, oder lokal konvexe Algebren betrachtet ?
2. Inwieweit lassen sich diese Sätze auf partielle Algebren übertragen ? und
3. Gelten sie auch für Coalgebren, also z.B. für Cogruppen oder Coringe ?

Diese drei Probleme konnte ich vollständig für die Klasse der Initialkategorien lösen, also z.B. für die Kategorien der topologischen, der uniformen, oder der meßbaren Räume, für die Kategorien der topologischen $\mathbb{C}$ -linearen, der lokal konvexen, der Borel-, oder der Limesräume.

Der Begriff einer Initialkategorie $\underline{K}$, genauer einer Initialkategorie $\underline{K}$ über einer Basiskategorie $\underline{L}$, die kategorische Verallgemeinerung des Bourbaki-Begriffes einer Initialstruktur ([2]), führte nicht nur zur Lösung der angegebenen Probleme für eine Reihe von Kategorien, sondern es zeigte sich auch, daß die Existenz von Initialstrukturen in einer Kategorie zahlreiche weitere kategorische Eigenschaften für diese Kategorie impliziert. So existieren z.B. in den Kategorien der topologischen, meßbaren oder uniformen Räume beliebige projektive und induktive Limites, Generatoren, Cogeneratoren, (Cokern, Mono)-Faktorisierungen von Morphismen usw., da diese Eigenschaften in der zugehörigen Basiskategorie $\underline{Me}$ gelten.

Eines der weiteren Hauptergebnisse dieser Arbeit, neben der Lösung der oben angeführten Probleme, ist nun die Aussage, daß die Konstruktion beliebiger partieller Algebren über einer Initialkategorie wieder zu einer Initialkategorie führt, d.h. ist $\underline{K}$ eine Initialkategorie (über $\underline{L}$) und $\underline{C}$ eine partielle algebraische Theorie (z.B. die "Theorie" der Gruppen, Ringe, R -Moduln...),

so ist die Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ der $\underline{C}$ -Algebren in $\underline{K}$ wieder eine Initialkategorie (über $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$).

Damit gilt die gesamte in Kap. I entwickelte Theorie der Initialkategorien selbst wieder für jede algebraische Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ über einer Initialkategorie $\underline{K}$.

Im ersten Kapitel behandle ich die grundlegende Theorie von Initialkategorien.

In §1 wird die bisher bekannte Theorie in einer für uns geeigneten (d.h. kategorischen) Form dargestellt.

In §2 führe ich die Kategorie $\text{Initial}(\underline{L})$ der Initialkategorien und Initialmorphisme über der Grundkategorie $\underline{L}$ ein und zeige, daß erstens die Kategorie $\text{Initial}(\underline{L})$ beliebige Limites besitzt (damit hat man unter anderem ein globales Verfahren aus Initialkategorien neue zu konstruieren) und zweitens diese Kategorie kanonisch isomorph zu einer vollen Funktorkategorie ist. Diese Charakterisierung als Funktorkategorie liefert einfache Kriterien (§4, 4.3.), Initialkategorien als solche nachzuweisen, oder neue zu konstruieren (lokales Verfahren).

In §3 gebe ich einige der grundlegenden Eigenschaften an, die sich von einer Basiskategorie $\underline{L}$ auf eine Initialkategorie $\underline{K} \in \text{Initial}(\underline{L})$ übertragen, d.h. die initial-erblich sind.

Im folgenden Paragraphen untersuche ich reflektive, coreflektive sowie Initialunterkategorien von Initialkategorien. Die angegebenen Charakterisierungen liefern z.B. in trivialer Weise die Existenz von vollständigen

Regularisierungen, von T_i -Vervollständigungen ($i=0,1,2,3$), von "Nulldimensionierungen" topologischer Räume, oder die Lokalkonvexifizierung von topologischen $\mathbb{R}$ -linearen Räumen usw.

Im zweiten Kapitel untersuche ich die universellen Eigenschaften partieller Algebren über Initialkategorien.

Im ersten Paragraphen dieses Kapitels definiere ich partielle Algebren als limeserhaltende Funktoren auf gewissen kleinen Kategorien, den algebraischen Theorien. Dies verallgemeinert gleichzeitig den Begriff einer partiellen Algebra bzw. einer Relationenalgebra im Birkhoffschen Sinn.

In den folgenden Abschnitten weise ich die zentralen Sätze der universellen Algebra für partielle Algebren über Initialkategorien nach, untersuche speziell gleichungsdefinierte Algebren und Coalgebren und konstruiere explizit die Initialstruktur algebraischer Kategorien über Initialkategorien.

In dieser Arbeit verwende ich die Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel, wobei jedoch noch die Existenz von Universa, also die Existenz von Modellen gefordert wird. Speziell nenne ich die Elemente eines Universums $\mathcal{U}$ Mengen oder genauer $\mathcal{U}$ -Mengen und die Teilmengen dieses Universums Klassen oder $\mathcal{U}$ -Klassen.

Zum Schluß möchte ich nicht versäumen, Herrn Dr. U. Oberst für seine Hinweise und zahlreichen Diskussionen herzlichst zu danken.

Kap. I : I n i t i a l k a t e g o r i e n

§1. Initialkategorien über beliebigen Kategorien.

Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Funktor. Mit $\underline{FK}$ bezeichne ich die Bildkategorie von F . Die Objekte von $\underline{FK}$ sind die Objekte von $\underline{K}$, während die Menge der Morphismen $\underline{FK}(K, K')$ für jedes Paar K, K' von $\underline{FK}$ -Objekten durch $\underline{FK}(K, K') := \underline{L}(FK, FK')$ definiert ist. Die Verknüpfung von Morphismen ist die gleiche wie in $\underline{L}$.

1.1. Definition. Ein $\underline{FK}$ -Morphismus $f : K \longrightarrow K'$ heißt ein F-Morphismus, wenn es einen $\underline{K}$ -Morphismus $f' : K \longrightarrow K'$ gibt mit $Ff' = f$.

Die kategorische Formulierung des Begriffes "Initial-objekt" von Bourbaki ([2]) liefert unmittelbar folgende (vgl. [1], [18], [22])

1.2. Definition. Seien $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein treuer Funktor, $K_i, i \in I$, eine Familie von $\underline{K}$ -Objekten, und $f_i : \underline{L} \longrightarrow \underline{FK}_i, i \in I$, eine Familie von $\underline{L}$ -Morphismen mit gleichem Definitionsbereich. Ein $\underline{K}$ -Objekt L_{ind} heißt ein durch $(f_i : \underline{L} \longrightarrow \underline{FK}_i, i \in I)$ induziertes F-Initialobjekt, wenn Folgendes erfüllt ist:

1. $\underline{FL}_{\text{ind}} = \underline{L}$, und
2. Ein $\underline{FK}$ -Morphismus $f : K \longrightarrow L_{\text{ind}}$ ist genau dann ein F-Morphismus, wenn alle $\underline{FK}$ -Morphismen $f_i f, i \in I$, F-Morphismen sind.

Falls ein solches Objekt L_{ind} existiert, nenne ich die Familie $(f_i : \underline{L} \longrightarrow \underline{FK}_i, K_i; i \in I)$ F-initial und schreibe

$(L_{ind}, f_i, K_i; i \in I)$.

1.3. Bemerkungen.

1. Ist $(L_{ind}, f_i, K_i, i \in I)$ F-initial, so sind die FK-Morphismen
 $f_i : L_{ind} \rightarrow K_i, i \in I$, F-Morphismen.
2. Ein F-Initialobjekt ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
3. Initial- und dual Cointialobjekte können auch durch geeignete darstellbare Funktoren beschrieben werden.

1.4. Definition. Sei $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ ein Funktor. Die Kategorie K heißt F-klein, wenn für jedes Objekt $L \in \underline{L}$ die Klasse

$$F^{-1}L : = \{ K \in \underline{K}; FK = L \}$$

bis auf Isomorphie eine Menge ist.

1.5. Definition. Sei $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ ein Funktor. Die Kategorie K heißt F-Initialkategorie und F ein Initialfunktor, wenn Folgendes gilt:

1. F ist treu,
2. K ist F-klein, und
3. Jede Familie $(f_i, K_i; i \in I)$ ist F-initial.

Dual definieren wir F-Cointialobjekt, F-Cointialkategorie und Cointialfunktor.

1.6. Beispiele.

1. Die folgenden Kategorien sind initial und cointial bzgl. der Vergißfunktoren in die Kategorie Me der Mengen:
 Die Kategorien der topologischen Räume, der uniformen Räume, der meßbaren Räume, der Dynkin-Systeme, der monotonen Klassen, der Limesräume, der Borelräume, der Räume mit

beschränkter Struktur...

2. Die Kategorie der topologischen R-linearen Räume ist initial und cointial bzgl. des Vergißfunktors in die Kategorie der R-linearen Räume.

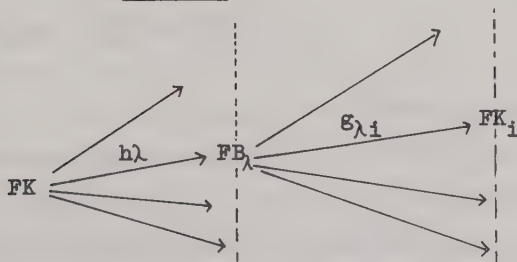
Weitere Beispiele werden sich leicht aus der Theorie von Initialunterkategorien von Initialkategorien ergeben.

Die folgende Proposition liefert die erwartete Transitivitätseigenschaft für Initialobjekte.

1.7. Proposition. (Bourbaki [2])

Seien $K_i, i \in I$, eine Familie von K -Objekten, und $I_\lambda, \lambda \in \Lambda$, eine Partition der Indexmenge I . Ist für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine F -initiale Familie $(B_\lambda, g_{\lambda i} : FB_\lambda \rightarrow FK_i; i \in I_\lambda)$ gegeben, so sind äquivalent:

- (i) $(K, h_\lambda : FK \rightarrow FB_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ ist F -initial.
- (ii) $(K, f_i := g_{\lambda i} h_\lambda : FK \rightarrow FK_i; i \in I)$ ist F -initial.



Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition von F -Initialobjekten.

Die nächste Proposition, die von Antoine ([1]) und Roberts ([18]) bewiesen wurde, zeigt, daß der Begriff einer Initialkategorie selbstdual ist.

1.8. Proposition. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Funktor.

Die Kategorie $\underline{K}$ ist genau dann F-initial, wenn sie F-coinitial ist.

§2 Charakterisierung von Initialkategorien.

2.1. Definition. Seien $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ und $F' : \underline{K}' \longrightarrow \underline{L}$ Initial-funktoren über $\underline{L}$. Ein Funktor $H : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}'$ heißt ein L-Initialmorphismus, wenn

1. $F = F'H$ gilt, und
2. H Initialobjekte erhält, d.h.

Ist $(L_{ind}, f_i : L \longrightarrow FK_i; i \in I)$ F-initial, so ist

$(HL_{ind}, f_i : L \longrightarrow F'(HK_i); i \in I)$ F'-initial.

Damit erhalten wir eine Kategorie, die Kategorie $\text{Initial}(\underline{L})$ der Initialfunktoren und Initialmorphisimen über $\underline{L}$.

2.2. Beispiele.

1. Der kanonische Funktor von der Kategorie Unif der uniformen Räume in die Kategorie Top der topologischen Räume ist ein Me-Initialmorphismus.
2. Der Einbettungsfunktor von der Kategorie der lokal konvexen Räume in die Kategorie der topologischen $\mathbb{R}$ -linearen Räume ist ein Initialmorphismus über der Kategorie der $\mathbb{R}$ -linearen Räume.

Als nächstes führe ich den Begriff einer reduzierten Initialkategorie über $\underline{L}$ ein.

2.3. Definition. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor.

Dann heißen zwei $\underline{K}$ -Objekte K, K' F-äquivalent, wenn es einen K-Isomorphismus $f : K \longrightarrow K'$ gibt, so daß $Ff = \text{id}$ ist.

Wählt man aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten aus, so erhält man eine volle Unterkategorie $\underline{K}_{\text{red}}$ von $\underline{K}$, eine zu $\underline{K}$ reduzierte Kategorie.

2.4. Proposition. Sei $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork. Dann gilt:

1. $F|_{\underline{K}_{\text{red}}} : \underline{K}_{\text{red}} \rightarrow \underline{L}$ ist ein Initialfunktork.

2. Die Kategorien $\underline{K}$ und $\underline{K}_{\text{red}}$ sind in der Kategorie $\text{Initial}(\underline{L})$ äquivalent.

Beweis: Sei $f_i : L \rightarrow FK_i, i \in I$ und $K_i \in \underline{K}_{\text{red}}$ für jedes $i \in I$, eine Familie von $\underline{L}$ -Morphismen. Dann ist der Repräsentant eines durch die Familie $(f_i, K_i; i \in I)$ induzierten F -Initialobjektes das durch $(f_i, K_i; i \in I)$ in $\underline{K}_{\text{red}}$ induzierte $F|_{\underline{K}_{\text{red}}}$ -Initialobjekt. Die zweite Behauptung ist klar.

Für den Rest der Arbeit wollen wir uns einfachheitshalber auf reduzierte Initialkategorien beschränken¹⁾. Damit ist insbesondere ein durch eine Familie $(f_i, K_i; i \in I)$ induziertes F -Initialobjekt eindeutig bestimmt.

Das folgende Theorem liefert ein "globales" Mittel, Initialkategorien zu konstruieren.

2.5. Theorem. $\text{Initial}(\underline{L})$ ist vollständig.

Die Limites werden in der Komma-Kategorie $(\text{Cat}, \underline{L})$ gebildet.

1) Der Begriff einer reduzierten Initialkategorie geht jedoch nur in den Theoremen 2.5, 2.6, und 4.3.5 bzw. 4.3.6 ein, die in der übrigen Arbeit nicht weiter verwendet werden.

Beweis. Nach einem bekannten Satz genügt es zu zeigen, daß die Kategorie $\text{Initial}(\underline{L})$ beliebige Produkte und Differenzkerne besitzt. Sei $F_i : \underline{K}_i \longrightarrow \underline{L}$, $i \in I$, eine Familie von Initialfunktoren, und bezeichne $\prod_{\underline{L}} \underline{K}_i$ das Faserprodukt der F_i in Cat .

$$\begin{array}{ccc}
 \prod_{\underline{L}} \underline{K}_i & \xrightarrow{P_i} & \underline{K}_i \\
 \downarrow P_j & \quad = \quad & \downarrow F_i \\
 \underline{K}_j & \xrightarrow{F_j} & \underline{L}
 \end{array}$$

Sei $F := F_j P_j : \prod_{\underline{L}} \underline{K}_i \longrightarrow \underline{L}$, $j \in I$. Weiter seien K_γ , $\gamma \in \Gamma$ eine Familie von $\prod_{\underline{L}} \underline{K}_i$ -Objekten, und $f_\gamma : \underline{L} \longrightarrow FK_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, eine Familie von $\underline{L}$ -Morphismen. Dann ist, nach der Konstruktion des Faserproduktes in Cat , die Familie $(L_{\text{ind}}^i; i \in I)$ der durch $f_\gamma : \underline{L} \longrightarrow F_i(P_i K_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ und $i \in I$, induzierten F_i -Initialobjekte L_{ind}^i ein $\prod_{\underline{L}} \underline{K}_i$ -Objekt. Seien nun $K \in \prod_{\underline{L}} \underline{K}_i$, und $t : FK \longrightarrow \underline{L}$ ein $\underline{L}$ -Morphismus, so daß für jedes $\gamma \in \Gamma$ $h_\gamma := f_\gamma \cdot t$ ein F -Morphismus ist. Für jedes $i \in I$ ist nun offensichtlich h_γ ein F_i -Morphismus. Damit ist, wie man leicht nachrechnet, t selbst ein F -Morphismus. Der Funktor $F : \prod_{\underline{L}} \underline{K}_i \longrightarrow \underline{L}$ ist ein Initialfunktor, und die Projektionen $P_i : \prod_{\underline{L}} \underline{K}_i \longrightarrow \underline{K}_i$ sind nach Konstruktion der F -Initialobjekte Initialmorphisme über $\underline{L}$. Seien $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ und $F' : \underline{K}' \longrightarrow \underline{L}$ zwei Initialfunktoren, $G, H : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}'$ Initialmorphisme von F nach F' , und $\text{Ker}(G, H)$ der Differenzkern von G, H in $(\text{Cat}, \underline{L})$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Ker}(G, H) & \xrightarrow{\text{ker}(G, H)} & \underline{K} & \xrightleftharpoons{G, H} & \underline{K}' \\
 & \searrow F'' & \downarrow F & \quad = \quad & \downarrow F' \\
 & & \underline{L} & &
 \end{array}$$

Seien $K_i, i \in I$, eine Familie von $\underline{\text{Ker}}(G, H)$ -Objekten,
 $f_i : L \longrightarrow F'K_i = F(\text{ker}(G, H)K_i), i \in I$, eine Familie von
 L -Morphismen, und L_{ind} das von $(f_i, \text{ker}(G, H)K_i; i \in I)$ erzeugte
 F -Initialobjekt. Da die Funktoren G und H Initialobjekte
erhalten, ist GL_{ind} bzw. HL_{ind} das von $f_i : L \longrightarrow F'(\text{Gker}(G, H)K_i)$
bzw. von $f_i : L \longrightarrow F'(\text{Hker}(G, H)K_i), i \in I$, erzeugte F' -Initial-
objekt. Da die Initialobjekte eindeutig bestimmt sind,
und $\text{Gker}(G, H)K_i = \text{Hker}(G, H)K_i$ für alle $i \in I$ gilt, erhalten wir
 $GL_{\text{ind}} = HL_{\text{ind}}$. Damit ist L_{ind} ein $\underline{\text{Ker}}(G, H)$ -Objekt. Der
Funktork $F' = F\text{ker}(G, H) : \underline{\text{Ker}}(G, H) \longrightarrow \underline{L}$ ist offensichtlich
treu, und die Kategorie $\underline{\text{Ker}}(G, H)$ F' -klein. Damit ist F' ein
Initialfunktork und $\text{ker}(G, H)$ ein Initialmorphismus. Folglich
ist $\text{Initial}(\underline{L})$ vollständig, und die Limites werden in $(\text{Cat}, \underline{L})$
gebildet.

Das nächste Theorem charakterisiert die Kategorie $\text{Initial}(\underline{L})$
durch eine Funktorkategorie. Hiermit werden wir gleichzeitig
einfache Kriterien gewinnen, Initialkategorien als solche nach-
zuweisen oder neue zu konstruieren.

2.4. Theorem. (vgl. [18]) Die Kategorie $\text{Initial}(\underline{L})$ der
Initialfunktoren und Initialmorphismen über $\underline{L}$ ist kanonisch iso-
morph zur vollen Funktorkategorie $(\underline{L}^{\text{op}}, \underline{\text{Lc}}(V))$.

Hierbei bezeichnet $\underline{\text{Lc}}(V)$ die Kategorie der vollständigen
Verbände und derjenigen ordnungstreuen Abbildungen, die
Suprema erhalten.

Beweis: Seien $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork, und K, K' $\underline{K}$ -Objekte
mit $FK = FK'$. Ist die Identität $1 : FK' \longrightarrow FK$ ein F -Morphismus

Konstruktion von Initialobjekten, ist die durch $f : L' \longrightarrow F(VK_1)$ induzierte Initialstruktur gleich der durch $\text{id}_{L'} : L' \longrightarrow F(\gamma_F^f(K_1))$ $i \in I$, induzierten Initialstruktur, und es gilt:

$$\gamma_F^f(VK_1) = V(\gamma_F^f(K_1)).$$

Sei nun $H : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}'$ ein Initialmorphismus von $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ nach $F' : \underline{K}' \longrightarrow \underline{L}$. Sei γ_H folgende Familie $(\gamma_H^L; L \in \underline{L})$ von Abbildungen:

$$\gamma_H : \gamma_F \longrightarrow \gamma_{F'}$$

$$\gamma_H^L : \gamma_F^L \longrightarrow \gamma_{F'}^L : K \longrightarrow HK$$

HK ist offensichtlich in $\gamma_{F'}^L$, da nach Voraussetzung $F = F'H$ gilt.

Betrachten wir folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \gamma_F^L & \xrightarrow{\gamma_H^L} & \gamma_{F'}^L \\ \gamma_F^f \downarrow & & \downarrow \gamma_{F'}^f \\ \gamma_F^{L'} & \xrightarrow{\gamma_H^{L'}} & \gamma_{F'}^{L'} \end{array}$$

für einen L -Morphismus $f : L' \longrightarrow L$. Da H Initialobjekte erhält,

gilt einerseits $\gamma_H^{L'} \cdot \gamma_F^f(K) = H(\gamma_F^f(K)) = \gamma_{F'}^f(HK)$.

Andrerseits gilt $\gamma_{F'}^f \cdot \gamma_H^L(K) = \gamma_{F'}^f(HK)$.

Damit ist $\gamma_H : \gamma_F \longrightarrow \gamma_{F'}$ ein funktorieller Morphismus.

Die Abbildungen $\gamma_H^L, L \in \underline{L}$, erhalten trivialerweise Suprema, da nach Voraussetzung H Initialobjekte erhält, also speziell Suprema.

$$\gamma : \text{Initial}(\underline{L}) \longrightarrow (\underline{L}^{\text{op}}, \underline{L}(V))$$

ist mit diesen Definitionen ein Funktor.

2. Sei $P : \underline{L}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{L}(V)$ ein Funktor. Ich konstruiere hierzu in kanonischer Weise eine Kategorie $\underline{K}_P$ und einen Funktor

$\mathcal{I}_P : \underline{K}_P \longrightarrow \underline{L}$, der initial ist. Die Objekte von $\underline{K}_P$ sind die Paare

(L, K) mit $K \in \underline{PL}$, $L \in \underline{L}$. Falls keine Mißverständnisse auftreten, schreibe ich für (L, K) einfach K .

Ein Morphismus von $K = (L, K)$ nach $K' = (L', K')$ ist ein $\underline{L}$ -Morphismus $f : L \rightarrow L'$, für den $Pf(K') \leq K$ gilt. Damit erhalten wir eine Kategorie $\underline{K}_P$. Der Funktor $\mathcal{J}_P : \underline{K}_P \rightarrow \underline{L}$ ist die Projektion $(L, K) \mapsto L$. Wir müssen noch zeigen, daß $\mathcal{J}_P$ ein Initialfunktor ist. Seien (L_i, K_i) , $i \in I$, eine Familie von $\underline{K}_P$ -Objekten, und $f_i : \tilde{L} \rightarrow \mathcal{J}_P(L_i, K_i) = L_i$, $i \in I$, eine Familie von $\underline{L}$ -Morphismen. Sei $K := \bigvee_{i \in I} Pf_i(K_i)$.

Dann ist (L, K) ein durch $(f_i, (L_i, K_i); i \in I)$ induziertes $\mathcal{J}_P$ -Initialobjekt. Hierzu müssen wir Folgendes zeigen.

Sind (L', K') ein $\underline{K}_P$ -Objekt und $t' : L' \rightarrow L$ ein $\underline{L}$ -Morphismus, so ist t genau dann ein $\underline{K}_P$ -Morphismus von (L', K') nach (L, K) , wenn für jedes $i \in I$ der $\underline{L}$ -Morphismus $f_i t : L' \rightarrow L_i$ ein $\underline{K}_P$ -Morphismus von (L', K') nach (L_i, K_i) ist. Seien also alle $\mathcal{J}_{P, \underline{K}_P}$ -Morphismen $f_i t : \mathcal{J}_P(L', K') \rightarrow \mathcal{J}_P(L_i, K_i)$ $\mathcal{J}_P$ -Morphismen, d.h. $Pf_i t(K_i) \leq K'$ für alle $i \in I$. Dies impliziert $\bigvee_{i \in I} Pf_i t(K_i) \leq K'$. Da nun gilt: $VPf_i t(K_i) = VPtPf_i(K_i) = PtVPf_i(K_i) = Pt(K)$ ist $Pt(K) \leq K'$, d.h. aber t ist ein $\underline{K}_P$ -Morphismus.

Die Umkehrung ist trivial. Damit ist

$\mathcal{J}_P : \underline{K}_P \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor.

Sei $\mathcal{J} : P \rightarrow P'$ ein funktorieller Morphismus in $(\underline{L}^{\text{op}}, \underline{Lc}(V))$.

Ist (L, K) ein $\underline{K}_P$ -Objekt, so sei $\mathcal{J}_P(L, K) := (L, \mathcal{J}L(K))$.

Ist $f : (L, K) \rightarrow (L', K')$ ein $\underline{K}_P$ -Morphismus, d.h. $f : L \rightarrow L'$ ist ein $\underline{L}$ -Morphismus, und es gilt $Pf(K') \leq K$, so sei

$$\mathcal{J}_P f := f.$$

Da $\mathcal{J}L$ für alle $L \in \underline{L}$ Suprema erhält, impliziert $Pf(K') \leq K$ die Relation $\mathcal{J}L'(Pf(K')) \leq \mathcal{J}L(K)$. Wegen $\mathcal{J}L(Pf(K')) = P'f(\mathcal{J}L'(K')) \leq \mathcal{J}L(K)$ ist nun f ein $\underline{K}_{P'}$ -Morphismus von $(L, \mathcal{J}L(K)) = (L, \mathcal{J}_P(L, K))$

nach $(L', \varphi L'(K')) = (L', \tilde{\mathcal{I}}\varphi(L', K'))$. Damit ist

$$\tilde{\mathcal{I}}\varphi: \underline{K}_P \longrightarrow \underline{K}_{P'} : \begin{cases} K \longmapsto \varphi L(K) \\ f \longmapsto f \end{cases}$$

ein Funktor von $\underline{K}_P$ nach $\underline{K}_{P'}$, mit $\tilde{\mathcal{I}}_P = \tilde{\mathcal{I}}_{P'}\tilde{\mathcal{I}}\varphi$

$$\begin{array}{ccc} \underline{K}_P & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{I}}\varphi} & \underline{K}_{P'} \\ & \searrow \tilde{\mathcal{I}}_P \quad \quad \nearrow \tilde{\mathcal{I}}_{P'} & \\ & \underline{L} & \end{array} \quad =$$

Sei nun $(L_{\text{ind}}, f_i : L \longrightarrow \tilde{\mathcal{I}}_P(K_i); i \in I)$ eine $\tilde{\mathcal{I}}_P$ -initiale Familie.

Aus der Konstruktion der Initialobjekte in $\underline{K}_P$ folgt unmittelbar

$$L_{\text{ind}} = \bigvee_{i \in I} \text{Pf}_i(K_i).$$

Da $\varphi L, L \in \underline{L}$, nach Voraussetzung Suprema erhält, bekommen wir folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}\varphi L_{\text{ind}} &= \tilde{\mathcal{I}}\varphi \bigvee_{i \in I} \text{Pf}_i(K_i) = \varphi L(\text{VPf}_i(K_i)) = V(\varphi L(\text{Pf}_i(K_i))) = \\ &= V(P'f_i(\varphi L_i(K_i))) = \text{VP}'f_i(\tilde{\mathcal{I}}\varphi(K_i)). \end{aligned}$$

Dies besagt aber, daß $(\tilde{\mathcal{I}}\varphi(L_{\text{ind}}), f_i : L \longrightarrow \tilde{\mathcal{I}}_P(\tilde{\mathcal{I}}\varphi(K_i)); i \in I)$ eine $\tilde{\mathcal{I}}_P$ -initiale Familie ist. Damit erhält $\tilde{\mathcal{I}}\varphi$ Initialobjekte. Somit ist $\tilde{\mathcal{I}}\varphi$ ein Initialmorphismus, und $\tilde{\mathcal{I}}: (\underline{L}^{\text{op}}, \underline{Lc}(V)) \longrightarrow \text{Initial}(\underline{L})$ ein Funktor.

Wie man leicht nachrechnet, sind die Funktoren

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} &: \text{Initial}(\underline{L}) \longrightarrow (\underline{L}^{\text{op}}, \underline{Lc}(V)) \\ \tilde{\mathcal{I}} &: (\underline{L}^{\text{op}}, \underline{Lc}(V)) \longrightarrow \text{Initial}(\underline{L}) \end{aligned}$$

zueinander invers.

§3. Initialerbliche Eigenschaften.

Eine der wesentlichen Eigenschaften von Initialfunktoren $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ist die Reflektierung zahlreicher kategorischer Eigenschaften, d.h. zahlreiche Eigenschaften übertragen sich von der Kategorie $\underline{L}$ auf die Kategorie $\underline{K}$.

3.1. Proposition. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork. Dann gelten folgende Aussagen:

1. $\underline{K}$ -Limites ($\underline{K}$ -Colimites) werden in $\underline{L}$ gebildet und mit der durch die Projektionen (Injektionen) induzierten F -Initialstruktur (F -Cointialstruktur) versehen. (sofern sie existieren)
2. F erhält Limites und Colimites.
3. F erhält und reflektiert Monomorphismen und Epimorphismen.
4. Ist $\underline{L}$ vollständig (covollständig), so ist $\underline{K}$ vollständig (covollständig).
5. Ist $\underline{L}$ lokal klein (lokal coklein), so ist $\underline{K}$ lokal klein (lokal coklein).

Beweis. Da nach Proposition 3.2 der Initialfunktork F adjungiert und coadjungiert ist, erhält er Limites und Colimites.

Sei $S : \underline{D} \longrightarrow \underline{K}$ ein Diagramm, und existiere der $\underline{L}$ -Limes $\lim FS$.

Dann ist der $\underline{L}$ -Limes $\lim FS$ mit der durch die Projektionen induzierten F -Initialstruktur ein Limes von S in $\underline{K}$.

Damit werden $\underline{K}$ -Limites in $\underline{L}$ gebildet und mit der durch die Projektionen induzierten F -Initialstruktur versehen. Ist $\underline{L}$ vollständig, so ist $\underline{K}$ vollständig. Da F nach Voraussetzung ein treuer Funktor ist, reflektiert^{er} Monomorphismen und

Epimorphismen. Da $\underline{K}$ $\underline{F}$ -klein ist, $\underline{F}$ Monomorphismen erhält und reflektiert, ist $\underline{K}$ genau dann lokal klein, wenn $\underline{L}$ lokal klein ist. Die übrigen Aussagen folgen durch Dualisieren und Proposition 1.8.

3.2. Proposition. Jeder Initialfunktor besitzt einen adjungierten und coadjungierten Funktor.

Beweis. Sei $\underline{F} : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor. Nach Lemma 2.5 ist jede Faser ein vollständiger Verband. Dann definieren die größten (kleinsten) Elemente in den Fasern einen coadjungierten (adjungierten) Funktor von $\underline{F}$.

3.3. Korollar. Sei $\underline{F} : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor.

$\underline{K}$ besitzt genau dann einen Generator (Cogenerator), wenn $\underline{L}$ einen besitzt.

Hierbei heißt bekanntlich ein Objekt K einer Kategorie $\underline{K}$ ein Generator, wenn der Funktor $\underline{K}(K, -) : \underline{K} \longrightarrow \underline{Me}$ treu ist. (dual: Cogenerator).

Beweis. Sei $L \in \underline{L}$ ein Generator, und bezeichne $\underline{D} : \underline{L} \longrightarrow \underline{K}$ einen coadjungierten Funktor von $\underline{F}$. Dann ist $\underline{K}(\underline{D}L, -) \cong \underline{L}(L, -) \circ \underline{F}$ als Verknüpfung zweier treuer Funktoren treu. Sei umgekehrt $K \in \underline{K}$ ein Generator, und bezeichne $\underline{I} : \underline{L} \longrightarrow \underline{K}$ einen adjungierten Funktor von $\underline{F}$. Wegen $\underline{F}\underline{I} = \text{Id}$ ist $\underline{I}$ ein treuer Funktor, und damit auch $\underline{L}(\underline{F}K, -) \cong \underline{K}(K, -) \circ \underline{I}$ als Verknüpfung zweier treuer Funktoren. Durch Dualisieren zusammen mit Proposition 1.8 erhält man die entsprechende Aussage für Cogeneratoren.

Ich nenne (in Analogie zum topologischen Fall) die Bilder

des coadjungierten Funktors D diskrete K -Objekte und die
des adjungierten Funktors I von F indiskrete K -Objekte.

3.4. Beispiele.

1. Sei $F : K \longrightarrow Me$ ein Initialfunktor über der Kategorie Me der Mengen. Da in Me jede nichtleere Menge ein Generator, und jede Menge mit mindestens zwei Elementen ein Cogenerator ist, folgt unmittelbar: aus Korollar 3.3:

In K ist jedes nichtleere diskrete K -Objekt ein Generator, und jedes indiskrete K -Objekt K ein Cogenerator, falls FK mindestens zwei Elemente besitzt.

2. Die Kategorie $Grp(Top)$ der topologischen Gruppen ist eine Initialkategorie über der Kategorie Grp der Gruppen. (sh. Kap. II oder Bourbaki: Top. gen. Chap. 3, §1, Ex. 9)
Da Grp keinen Cogenerator besitzt (Isbell, unveröffentlicht), besitzt nach Kor. 3.3 auch $Grp(Top)$ keinen Cogenerator.

Für den Rest der Arbeit sei nun L stets eine vollständige, covollständige, lokal kleine und lokal cokleine Kategorie.
Aus dem speziellen Theorem für adjungierte Funktoren ([15]), sowie den Sätzen 3.1 und 3.3 erhalten wir das

3.5. Korollar. Sei $F : K \longrightarrow L$ ein Initialfunktor, und besitze L einen Cogenerator (Generator). Dann gilt:
Ein Funktor $H : K \longrightarrow D$, D beliebig, besitzt genau dann einen Coadjungierten (Adjungierten), wenn H Limites (Colimites) erhält.

3.6. Beispiele.

1. Nach Beispiel 3.4.1 erfüllt jede Initialkategorie über der Kategorie der Mengen die Voraussetzungen von Korollar 3.5

Da z.B. der kanonische Funktor von der Kategorie Unif der uniformen Räume in die Kategorie Top der topologischen Räume Limites erhält, besitzt er einen Coadjungierten, die Uniformisierung topologischer Räume. Auf der vollen Unterkategorie der uniformierbaren Räume ist die Uniformisierung eine Coretraktion. Allgemeiner besitzt jeder Initialmorphismus in Initial(Me) einen Coadjungierten.

2. Die Kategorie K der lokal konvexen Räume ist eine Initialkategorie über der Kategorie R-Mod, der R-linearen Räume. Da in R-Mod R selbst ein Generator und Cogenerator ist, besitzt jeder limeserhaltende Funktor $H : K \longrightarrow D$ einen Coadjungierten. Insbesondere erhält der Einbettungsfunktor von K in die Kategorie R-Mod(Top) der topologischen R-linearen Räume Limites. Damit besitzt dieser Einbettungsfunktor einen Coadjungierten, die Lokal-konvexifizierung topologisch R-linearer Räume.

Bekanntlich besitzt in ~~der~~ Kategorie Me der Mengen bzw. in jeder (gleichungsdefinierten) algebraischen Kategorie über Me jeder Morphismus eine (Cokern, Mono)-Faktorisierung (Homomorphiesatz). Diese Eigenschaft ist ebenfalls initialererblich, d.h. besitzt sie die Kategorie L, so auch jede Initialkategorie K über L.

3.7. Definition ([8]). Eine Kategorie K heißt eine (Cokern, Mono)-Bikategorie, wenn Folgendes gilt:

1. K ist (Cokern, Mono)-faktorisierbar, d.h. jeder K-Morphismus besitzt eine (Cokern, Mono)-Faktorisierung,
2. K ist eindeutig (Cokern, Mono)-faktorisierbar, d.h.

sind $f = mc = m'c'$ zwei $(\text{Cokern}, \text{Mono})$ -Faktorisierungen
des $\underline{K}$ -Morphismus f , so existiert ein Isomorphismus e mit

$$c' = ec.$$

3. Die Komposition von Cokernen ist ein Cokern.

4. $\underline{K}$ genügt der Diagonalabbildung, d.h.

jedes kommutative Diagramm,

indem c ein Cokern und m ein Monomorphismus ist, kann
kommutativ durch einen $\underline{K}$ -Morphismus l ergänzt werden.

3.8. Proposition ([24]). Sei $\underline{K}$ eine lokal cokleine, covoll-
ständige Kategorie, so sind äquivalent:

- (i) $\underline{K}$ ist $(\text{Cokern}, \text{Mono})$ -faktorisierbar.
- (ii) Die Komposition von Cokernen ist ein Cokern.
- (iii) $\underline{K}$ ist eine $(\text{Cokern}, \text{Mono})$ -Bikategorie.

3.9. Proposition. Sei $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork.

Die Kategorie $\underline{K}$ ist genau dann eine $(\text{Cokern}, \text{Mono})$ -Bikategorie,
wenn $\underline{L}$ eine $(\text{Cokern}, \text{Mono})$ -Bikategorie ist.

Beweis. Da $\underline{L}$ lokal coklein und covollständig ist, gilt dies
ebenfalls für $\underline{K}$. Ist in $\underline{L}$ die Komposition von Cokernen ein
Cokern, so gilt dies wegen der Konstruktion von Colimites
und der Transitivität von Coinitialobjekten auch für $\underline{K}$.

Die Umkehrung ist aufgrund von Proposition 3.1 und 3.3 klar.

3.10. Beispiele.

1. Jede Initialkategorie K über der Kategorie der Mengen ist eine (Cokern, Mono)-Bikategorie.
2. Die Kategorien der topologischen $\mathbb{R}$ -linearen Räume und der lokal konvexen Räume sind (Cokern, Mono)-Bikategorien.
3. Jede gleichungsdefinierte algebraische Kategorie über der Kategorie Top ist eine (Cokern, Mono)-Bikategorie (sh, Kap.II).

§4 Unterkategorien von Initialkategorien und ihre Charakterisierung.

4.1 Reflektive Unterkategorien.

Eine strikt volle Unterkategorie U einer Kategorie K heißt bekanntlich reflektiv, wenn der Einbettungsfunktor adjungiert ist. Sind die Reflexionen Epimorphismen, so heißt U eine epireflektive Unterkategorie. Dual definiert man coreflektiv und monocoreflektiv.

4.1.1. Proposition ([10],[24]).

Sei K eine lokal kleine, lokal cokleine, vollständige Kategorie.
Dann sind für eine strikt volle Unterkategorie U
folgende Aussagen äquivalent:

- (i) U ist epireflektiv in K .
- (ii) U ist abgeschlossen gegen Produkte und extreme Unterobjekte.

4.1.2. Definition. Seien $F : K \longrightarrow L$ ein Initialfunktor
und $K \in K$. Ein Unterobjekt $i : U \longrightarrow K$ heißt ein
 F -Initialunterobjekt, wenn U die durch

$$F_i : F U \longrightarrow F K$$

induzierte F -Initialstruktur trägt.

In diesem Falle nenne ich i eine Einbettung.

Dual definieren wir Coinitialquotientenobjekt und
Quotientenmorphismus.

4.1.3. Lemma. Sei $F : K \longrightarrow L$ ein Initialfunktor.

Dann ist jeder extreme K -Monomorphismus eine Einbettung.

Beweis: Seien $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\underline{K}$ und $Ff = hg : FA \longrightarrow Bi(Ff) \longrightarrow FB$ die (Epi, Mono)-Faktorisierung von Ff in $\underline{L}$ über das Bild $Bi(Ff)$. Versieht man $Bi(Ff)$ mit der durch $h : Bi(Ff) \longrightarrow FB$ induzierten F -Initialstruktur, so erhält man, da F treu ist, eine (Epi, Mono)-Faktorisierung von f in $\underline{K}$. Sei jetzt f ein extremer Monomorphismus. Dann sind A und $Bi(Ff)_{\text{ind}}$ isomorph, d.h. f ist eine Einbettung.

4.1.4. Definition. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork. Eine strikt volle Unterkategorie $\underline{U}$ von $\underline{K}$ heißt eine PIU-Unterkategorie von $\underline{K}$, wenn $\underline{U}$ gegen Produkte und F -Initialunterobjekte abgeschlossen ist.

Aus der Proposition 4.1.1 und dem Lemma 4.1.3 folgt die
4.1.5. Proposition. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork. Dann ist jede PIU-Unterkategorie $\underline{U}$ von $\underline{K}$ epirefektiv in $\underline{K}$.

Die Proposition 4.1.5 läßt sich auch leicht direkt mit Hilfe der (Epi, Mono)-Faktorisierung in $\underline{K}$ bzw. $\underline{L}$ beweisen.

4.1.6. Proposition. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork. Ist in der Kategorie $\underline{L}$ jeder Monomorphismus ein Kern (Beispiele: Kategorie der Mengen, abelsche Kategorien), so sind in $\underline{K}$ für einen Morphismus f äquivalent:

- (i) f ist eine Einbettung
- (ii) f ist ein extremer Monomorphismus
- (iii) f ist ein Kern

Damit sind in $\underline{K}$ die Begriffe PIU-Unterkategorie und epirefektive Unterkategorie äquivalent.

Beweis:

i $\rightarrow$ iij : Ist $f : A \rightarrow B$ eine Einbettung, so ist A das durch $Ff : FA \rightarrow FB$ induzierte F-Initialobjekt. Da Ff ein Monomorphismus ist, ist Ff nach Voraussetzung ein Kern in $\underline{L}$.

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightleftharpoons[k]{l} L, \quad Ff = \ker(l, k)$$

Versieht man L mit der von l, k induzierten F-Coinitialstruktur L^{ind} so erhält man in $\underline{K}$ das Diagramm

$$A \xrightarrow{f} B \xrightleftharpoons[k^{\text{ind}}]{l^{\text{ind}}} L^{\text{ind}}$$

Damit ist aber nach Proposition 3.1 das $\underline{K}$ -Objekt A ein Differenzkern von $l^{\text{ind}}, k^{\text{ind}}$ in $\underline{K}$.

iii $\rightarrow$ ii : Jeder Kern ist ein extremer Monomorphismus.

ii $\rightarrow$ i : Lemma 4.1.3.

4.1.7. Beispiele.

1. Sei Top die Kategorie der topologischen Räume. Dann erweisen sich sofort folgende Unterkategorien als epirefektiv:

Die Kategorien der T_0, T_1, T_2, T_3 -Räume, der vollständig regulären Räume, der nulldimensionalen Räume....

2. Seien U eine epireflektive Unterkategorie von Top, und

Unif-U die volle Unterkategorie der uniformen Räume, deren unterliegender topologischer Raum in U liegt.

(z.B. uniforme T_0, T_1 , oder T_2 -Räume). Dann ist Unif-U eine epireflektive Unterkategorie von Unif, da die

Topologie einer durch eine Familie von Abbildungen

$f_i : X \rightarrow U_i, i \in I$, induzierten uniformen Struktur auf X

die Initialtopologie der Topologien der einzelnen uniformen Räume $U_i, i \in I$, bzgl. der Abbildungen f_i ist. Dies impliziert insbesondere, daß Unif-U gegen Produkte und Unterräume abgeschlossen ist.

3. Eine strikt volle Unterkategorie in der Kategorie der lokal konvexen Räume ist genau dann epirefektiv, wenn sie gegen Produkte und Unterräume abgeschlossen ist.

4.2 Coreflektive Unterkategorien.

Durch Dualisieren der Proposition 4.1.5 erhalten wir die

4.2.1. Proposition. Sei $F : K \rightarrow L$ ein Initialfunkt.

Dann ist jede strikt volle Unterkategorie U von K , die gegen Coprodukte und Cointialquotientenobjekte abgeschlossen ist, monocoreflektiv in K .

4.2.2. Proposition. Seien K eine covollständige, lokal kleine und lokal cokleine Kategorie, und U eine strikt volle Unterkategorie von K . Sei G ein Generator von K , der in U liege. Dann sind äquivalent:

- (i) U ist coreflektiv in K .
- (ii) U ist bicoreflektiv in K , d.h. U ist eine coreflektive Unterkategorie von K , deren Co-reflexionen Bimorphismen, also Epi- und Monomorphismen sind.
- (iii) U ist gegen Coprodukte und extreme Quotientenobjekte abgeschlossen (d.h. U ist monocoreflektiv).

Beweis: $i \rightarrow ii$: Sei $r_K : RK \rightarrow K$ die U -Coreflexion von $K \in K$

und sei $f, g : K \twoheadrightarrow K'$ ein Paar von $\underline{K}$ -Morphismen mit $fr_K = gr_K$.
 Da $\underline{U}$ corefektiv ist, existiert zu jedem Morphismus $h : G \rightarrow K$
 genau ein $h : G \rightarrow RK$ mit $h = r_K h$. Hieraus folgt aber
 $fh = fr_K h = gr_K h = gh$. Da G ein Generator ist, impliziert
 dies $f = g$. Damit ist $\underline{U}$ epicorefektiv. Sei nun $h, k : K' \twoheadrightarrow RK$
 ein Paar von $\underline{K}$ -Morphismen mit $r_K h = r_K k$, und sei
 $r_{K'} : RK' \rightarrow K'$ die $\underline{U}$ -Coreflexion von K' . Dann folgt
 aber aus $r_K hr_{K'} = r_K kr_{K'}$, unmittelbar $hr_{K'} = kr_{K'}$, und
 hieraus $h = k$, da $r_{K'}$ ein Epimorphismus ist. Damit ist
 $\underline{U}$ bicorefektiv in $\underline{K}$.

ii $\rightarrow$ iii : Proposition 4.1.1

iii $\rightarrow$ i : trivial

4.2.3. Lemma. Sei $\underline{K}$ eine Initialkategorie über $\underline{Me}$.

Ist jede konstante Abbildung ein $\underline{K}$ -Morphismus, so ist
 jedes $\underline{K}$ -Objekt entweder ein Generator oder ein Anfangsobjekt.

Der Beweis ist klar, da in $\underline{Me}$ jede nichtleere Menge ein Generator,
 und die leere Menge genau das Anfangsobjekt in $\underline{Me}$ ist.

4.2.4. Beispiele. In den Kategorien der topologischen,
 der meßbaren, oder der Borel-Räume ist jede konstante Ab-
 bildung stetig bzw. meßbar bzw. Borel-verträglich.

4.2.5. Proposition. Sei $\underline{K}$ eine Initialkategorie über $\underline{Me}$.

Ist jede konstante Abbildung ein $\underline{K}$ -Morphismus, so sind
 für eine nichttriviale (strikt volle) Unterkategorie $\underline{U}$ von $\underline{K}$
 äquivalent:

(i) $\underline{U}$ ist corefektiv

(ii) $\underline{U}$ ist gegen Coprodukte und (Coinitial)-
 Quotientenobjekte abgeschlossen.

Darüber hinaus sind die Coreflexionen Bimorphismen.

4.2.6. Beispiele.

Aufgrund dieser Charakterisierung erweisen sich z.B. sofort folgende Unterkategorien von Top als corefektiv: die Kategorien der lokal zusammenhängenden Räume, der lokal wegzusammenhängenden Räume, der diskreten, der indiskret-erzeugten, der kompakt-erzeugten, der ω -folgenbestimmten Räume usw..

4.3 Initialunterkategorien und Initialunterfunktoren.

In diesem Abschnitt führe ich die äquivalenten Begriffe "Initialunterkategorie einer Initialkategorie" und "Initialunterfunktoren" ein. Hierbei spielen die Initialunterkategorien ungefähr die gleiche Rolle wie die Unter-algebren einer (universellen) Algebra. Der hierzu äquivalente Begriff eines Initialunterfunktors liefert uns einfache Kriterien, Initialkategorien als solche nachzuweisen oder neue zu konstruieren.

4.3.1. Definition. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktoren. Eine volle Unterkategorie $\underline{U}$ von $\underline{K}$ heißt F-Initialunterkategorie von $\underline{K}$, wenn $\underline{U}$ gegen F-Initialobjekte abgeschlossen ist, d.h. ist $f_i : L \longrightarrow F U_i, U_i \in \underline{U}$ und $i \in I$, eine Familie von $\underline{L}$ -Morphismen, so liegt das durch $(f_i, U_i; i \in I)$ induzierte F-Initialobjekt L_{ind} wieder in $\underline{U}$. Dual definiert man Coinitialunterkategorie.

4.3.2. Proposition. Seien $F : K \rightarrow L$ ein Initialfunktor und U eine Initialunterkategorie von K . Dann gilt:

1. U ist eine Initialkategorie über L mit dem kanonischen Initialfunktor $F|_U : U \rightarrow L$.
2. Der Einbettungsfunktor ist ein Initialmorphismus.
3. U ist eine epireflektive Unterkategorie von K .

Beweis: Die Aussagen 1 und 2 sind trivial.

Da U gegen Initialobjekte abgeschlossen ist, ist U insbesondere gegen Produkte und Initialunterobjekte abgeschlossen, und damit nach Proposition 4.1.5 epirefektiv.

4.3.3. Beispiele und Bemerkungen.

1. Sei U die Kategorie der lokal konvexen Räume. Dann ist U eine Initialunterkategorie der Kategorie $\mathbb{R}\text{-Mod}(\text{Top})$ der topologischen $\mathbb{R}$ -linearen Räume. Der zugehörige Initialfunktor ist der Vergißfunktor in die Kategorie $\mathbb{R}\text{-Mod}$, und der Reflektor $R : \mathbb{R}\text{-Mod}(\text{Top}) \rightarrow U$ die Lokalkonvexifizierung topologisch $\mathbb{R}$ -linearer Räume.
2. Eine Initialunterkategorie ist im allgemeinen keine Cointialunterkategorie, wie folgendes Beispiel zeigt ([19]): Sei U wie in 1 gewählt. Seien X ein $\mathbb{R}$ -linearer Raum mit nicht abzählbarer Dimension und I die Menge der eindimensionalen linearen Teilräume T von X , die mit der natürlichen (separierten und lokal konvexen) Topologie versehen seien. Für $T \in I$ sei $f_T : T \rightarrow X$ die kanonische Inklusion. Offenbar ist die zugehörige lineare Cointialtopologie gleich der feinsten linearen Cointialtopologie $\mathcal{L}$.

auf X ; die zugehörige lokalkonvexe Cointialtopologie $\mathcal{K}$ ist die feinste lokal konvexe Topologie $\mathcal{K}$ auf X .

Aber $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$ sind verschieden, da $\dim X$ nicht abzählbar ist (Kelley-Namioka [9]), und daher ist $\mathcal{L}$ nicht lokal konvex.

3. Nach Proposition 4.3.2 ist jede Initialunterkategorie einer Initialkategorie epi-reflektiv. Die Umkehrung hiervon gilt jedoch nicht allgemein, wie das Beispiel der Kategorie $T_2\text{-Top}$ der Hausdorff-Räume in der Kategorie Top aller topologischen Räume zeigt. Wäre $T_2\text{-Top}$ eine Initialunterkategorie von Top , so wäre ein $T_2\text{-Top}$ -Morphismus genau dann ein Epimorphismus, wenn er surjektiv wäre (sh. Proposition 3.1 und 4.3.2.1). Dies ist aber bekanntlich falsch.

4. Sei $\underline{K}$ eine Initialkategorie. Da der Durchschnitt von Initialunterkategorien offensichtlich wieder eine Initialunterkategorie ist, kann man jeder Unterkategorie $\underline{U}$ von $\underline{K}$ ihre initiale Hülle $\text{In}(\underline{U})$ zuordnen.

Nach Theorem 2.4 sind die Kategorien $\text{Initial}(\underline{L})$ und $(\underline{L}^{\text{op}}, \underline{\text{Lc}}(V))$ kanonisch isomorph. Hiermit erhalten wir folgendes

4.3.4. Theorem (Charakterisierung von Initialunterkategorien)

Sei $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor, und sei $S := \gamma_F : \underline{L}^{\text{op}} \rightarrow \underline{\text{Lc}}(V)$ der zugehörige Funktor aus $(\underline{L}^{\text{op}}, \underline{\text{Lc}}(V))$.

Der kanonische Funktor $\gamma : \text{Initial}(\underline{L}) \rightarrow (\underline{L}^{\text{op}}, \underline{\text{Lc}}(V))$

induziert eine Bijektion zwischen den Initialunterkategorien von $\underline{K}$ und den Unterfunktoren von S .

$$\{ \underline{U}; \underline{U} \text{ ist Initialunterkategorie von } \underline{K} \} \xleftrightarrow[\gamma]{\gamma} \{ \underline{U}; \underline{U} \text{ ist Unterfunktor von } S \}$$

Die Unterfunktoren eines Funktors $S : \underline{L}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{\text{Lc}}(V)$ nenne ich deshalb auch Initialunterfunktoren.

Die beiden nächsten Theoreme liefern bei einer Reihe von Kategorien ein sehr einfaches Mittel, deren Initialstruktur nachzuweisen. Darüber hinaus zeigen diese Theoreme explizit, wie man aus gegebenen Initialkategorien neue gewinnen kann (Lokales Verfahren; vgl. Theorem 2.3).

4.3.5. Theorem (vgl. 2.4). Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein treuer Funktor. F ist genau dann ein Initialfunktor, wenn es einen Funktor $S : \underline{L}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{\text{Lc}}(V)$ gibt, so daß Folgendes gilt:

1. Für alle $L \in \underline{L}$ ist $F^{-1}L$ eine gegen Suprema abgeschlossene Teilmenge von SL .
2. Ist $f : L \longrightarrow L'$ ein $\underline{L}$ -Morphismus, und ist $K' \in F^{-1}L'$, so ist $Sf(K') \in F^{-1}L$.
3. Ein $\underline{\text{FK}}$ -Morphismus $f : \underline{\text{FK}} \longrightarrow \underline{\text{FK'}}$ ist genau dann ein $\underline{F}$ -Morphismus, wenn $Sf(K') < K$ ist.

Beweis: Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor. Dann gelten offensichtlich die Bedingungen 1, 2, und 3 für $S = \gamma_F^{\sim} : \underline{L}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{\text{Lc}}(V)$. Sei umgekehrt $S : \underline{L}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{\text{Lc}}(V)$ ein Funktor, und seien die Bedingungen 1 bis 3 erfüllt. Die Bedingungen 1 und 2 implizieren,

$$\text{daß} \quad U : \underline{L}^{\text{op}} \longrightarrow \underline{\text{Lc}}(V) : \quad \begin{cases} L \mapsto UL = F^{-1}L \\ f \mapsto Uf = Sf \end{cases}$$

ein Initialunterfunktor von S ist. Damit ist $\gamma_U : \underline{K}_U \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor. Nach der Konstruktion von γ_U liefert die Bedingung 3 $\gamma_U = F$.

Entsprechend erhalten wir das (zusammen mit Proposition 1.8)

4.3.6. Theorem. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein treuer Funktor.

F ist genau dann ein Initialfunktor, wenn es einen Funktor

$R : \underline{L} \longrightarrow \underline{Lc}(\wedge)$ gibt, so daß Folgendes gilt:

1. Für alle $L \in \underline{L}$ ist $F^{-1}L$ eine gegen Infima abgeschlossene Teilmenge von RL
2. Ist $f : L \longrightarrow L'$ ein $\underline{L}$ -Morphismus, und ist $K \in F^{-1}L$, so ist $Rf(K) \in F^{-1}L'$.
3. Ein $\underline{FK}$ -Morphismus $f : FK \longrightarrow FK'$ ist genau dann ein F -Morphismus, wenn $K'(K)Rf(K)$ ist.

4.3.7. Beispiele.

1. Sei $F : \underline{Me}^{op} \longrightarrow \underline{Me}$ der kontravariante Potenzmengenfunktor.

Dann ist trivialerweise $R := PP$ ein Funktor aus $(\underline{Me}, \underline{Lc}(\wedge))$.

Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{Me}$ ein treuer Funktor mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $X \in \underline{Me}$ ist $F^{-1}X$ eine gegen Durchschnitte abgeschlossene Teilmenge von PPX .
2. Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und $\chi \in F^{-1}X$, so ist $PPf(\chi) = \{ U \subset Y; f^{-1}U \in \chi \}$ ein Element aus $F^{-1}Y$.
3. Eine Abbildung $f : X = F(X, \chi) \longrightarrow Y = F(Y, \eta)$ ist genau dann ein $\underline{K}$ -Morphismus von (X, χ) nach (Y, η) , wenn $\eta \subset PPf(\chi)$ gilt, d.h. wenn $f^{-1}\eta \subset \chi$ ist.

Dann ist $\underline{K}$ eine Initial- und damit Coinitialkategorie über $\underline{Me}$.

Darüber hinaus ist $\underline{K}$ eine Coinitialunterkategorie von $\underline{K}_R$.

Hiermit erweisen sich sofort folgende Kategorien als Initial- und Coinitialkategorien über $\underline{Me}$:

Die Kategorien der topologischen Räume, der meßbaren Räume, der Dynkin-Systeme, σ -Dynkin-Systeme, σ -Dynkin-Algebren,

der monotonen Klassen, der geringsten Mengen, der Borelräume....

2. Sei $F_i : \underline{K}_i \longrightarrow \underline{L}, i \in I$, eine Familie von Initialfunktoren.
Gibt es einen Funktor $S : \underline{L}^{op} \longrightarrow \underline{Lc}(V)$, so daß alle
Funktoren γ_{F_i} Unterfunktoren von S sind, so sind die
Kategorien $\underline{K}_i$ Initialunterkategorien von $\underline{K}_S$. Dann ist der
Durchschnitt $\bigcap \underline{K}_i = : \underline{K}$ eine Initialunterkategorie von $\underline{K}_i, i \in I$.
3. Für den dualen Fall erhält man hieraus z.B. für die
die Kategorie Top: Ist $\underline{K}$ eine Coinitial-Unterkategorie
von $\underline{K}_{\text{PF}}$ (alle Beispiele in 1 erfüllen diese Bedingung),
so ist der Durchschnitt $\underline{K} - \text{Top} : = \underline{K} \cap \text{Top}$ eine Coinitial-
unterkategorie von Top, und damit selbst eine Initialkategorie
über Me.
4. Seien $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor, $\underline{C}$ eine algebraische
Theorie (sh. Kap II), und $(\underline{C}, \underline{K})$ die volle Unterkategorie
der Funktoren aus $(\underline{C}, \underline{K})$, deren Bilder unter
 $(\underline{C}, F) : (\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow (\underline{C}, \underline{L})$ in der Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ der
 $(\underline{C}, \underline{L})$ -Algebren liegen. Dann ist $(\underline{C}, \underline{K})$ in kanonischer
Weise eine Initialkategorie über $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$. Die volle
Unterkategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ der $(\underline{C}, \underline{K})$ -Algebren in $(\underline{C}, \underline{K})$ ist
eine Initialunterkategorie. Dies impliziert insbesondere,
daß der kanonische Funktor

$$F : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$$
ein Initialfunktor ist. Die letzte Aussage wird in Kap. II
explizit bewiesen.

Initialunterkategorien lassen sich nun folgendermaßen intern charakterisieren:¹⁾

4.3.8. Theorem. Sei $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork.

Eine volle Unterkategorie $\underline{U}$ von $\underline{K}$ ist genau dann eine F -Initialunterkategorie von $\underline{K}$, wenn

1. $\underline{U}$ abgeschlossen gegen Produkte und F -Initialunterobjekte ist, und wenn
2. $\underline{U}$ alle indiskreten $\underline{K}$ -Objekte enthält.

Beweis: Seien $\underline{U}$ eine Unterkategorie von $\underline{K}$, die die Bedingungen 1, 2 erfülle, $(U_i; i \in I)$ eine Familie von $\underline{U}$ -Objekten, und $f_i : L \rightarrow FU_i$, $i \in I$, eine Familie von $\underline{L}$ -Morphismen. Bezeichne weiter JL das durch $L \in \underline{L}$ induzierte indiskrete $\underline{K}$ -Objekt. Ergänzen wir die Familie $f_i, i \in I$, mit der Identität $1_L : L \rightarrow F(JL) = L$, so sind die durch $(f_i, U_i; i \in I)$ bzw. $(f_i, 1_L, U_i, JL; i \in I)$ auf L induzierten F -Initialobjekte gleich. (triviale Ergänzung initialer Familien). Betrachten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 FU_i & \xleftarrow{p_i} & F(JL) \prod (\prod_i FU_i) = F(JL \prod (\prod_i U_i)) & \xrightarrow{p_L} & F(JL) = L \\
 & \searrow f_i & \uparrow f_1 & \nearrow f & \\
 & & L & &
 \end{array}$$

Hierbei bezeichnen p_i bzw. p_L die entsprechenden Projektionen. Da f ein Monomorphismus ist, und die Konstruktion von Initialobjekten transitiv ist, ist das durch f_i induzierte F -Initialobjekt L_{ind} ein F -Initialunterobjekt von $JL \prod (\prod_i U_i)$, liegt also selbst in $\underline{U}$. Die Umkehrung ist trivial.

1) Die Seiten 29 - 31 wurden erst während der Drucklegung der Dissertation beigelegt.

Ist in der Basiskategorie $\underline{L}$ jeder Monomorphismus ein Kern, so sind die Begriffe epireflektive Unterkategorie und PIU-Unterkategorie äquivalent. Damit erhält man das

4.3.9. Korollar. Sei $\underline{K}$ eine Initialkategorie über $\underline{Me}$, und $\underline{U}$ eine Unterkategorie von $\underline{K}$, die alle indiskreten $\underline{K}$ -Objekte enthalte. Dann sind äquivalent:

- (i) $\underline{U}$ ist eine Initialunterkategorie von $\underline{K}$.
- (ii) $\underline{U}$ ist epirefektiv.

Enthält eine Unterkategorie $\underline{U}$ einer covollständigen, lokal kleinen und lokal cokleinen Kategorie $\underline{K}$ einen Generator von $\underline{K}$, so sind die Begriffe corefektiv und monocorefektiv äquivalent (sh. 4.2.2.). Sei $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork. Ist $L \in \underline{L}$ ein Generator in $\underline{L}$, so ist das diskrete $\underline{K}$ -Objekt DL ein Generator in $\underline{K}$ (sh. 3.3). Damit erhält man durch Dualisieren von Theorem 4.3.8 das

4.3.10. Korollar. Seien $\underline{K}$ eine Initialkategorie über $\underline{Me}$, und $\underline{U}$ eine Unterkategorie von $\underline{K}$, die alle diskreten $\underline{K}$ -Objekte enthalte. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\underline{U}$ ist eine Coinitialunterkategorie von $\underline{K}$.
- (ii) $\underline{U}$ ist corefektiv.

4.3.11. Beispiele.

1. Sei $\underline{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen. Dann sind die Unterkategorien der indiskreten, der nulldimensionalen, der T_3 -Räume usw. Initialunterkategorien von $\underline{Top}$. Die Kategorien der T_i -Räume ($i = 0, 1, 2$), der nulldimensionalen T_0 -Räume, der total unzusammenhängenden Räume sind dagegen keine Initialunterkategorien von $\underline{Top}$.

2. Die folgenden Unterkategorien von Top sind Cointialunterkategorien von Top und somit Initialkategorien über Me.
Die Kategorien der diskreten Räume, der indiskret-erzeugten, der endlich erzeugten, der folgenbestimmten, der kompakt-erzeugten, der lokal zusammenhängenden, der zusammenhängend erzeugten, der lokal wegzusammenhängenden Räume usw..

Kap. II : P a r t i e l l e A l g e b r e n i n I n i t i a l k a t e g o r i e n

§1 Partielle Algebren in beliebigen Kategorien.

1.1. Definition. Seien $\underline{C}$ eine kleine Kategorie und $\mathcal{C}$ eine Familie von Diagrammen $S : \underline{D}_S \longrightarrow \underline{C}$ mit Limites in $\underline{C}$. Dann nenne ich das Paar $(\underline{C}, \mathcal{C})$ eine (partiell)-algebraische Theorie.

Ich schreibe hierfür kurz $\underline{C}$, falls keine Mißverständnisse auftreten.

Sind $(\underline{C}, \mathcal{C})$ und $(\underline{D}, \mathcal{D})$ algebraische Theorien, so heißt ein Funktor $f : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ ein Theoriemorphismus, falls f die Limites $\lim S$ mit $S \in \mathcal{C}$ erhält, und falls jedes Diagramm $fS : \underline{D}_S \longrightarrow \underline{D}$, $S \in \mathcal{C}$, in $\mathcal{D}$ liegt.

1.2. Definition. Seien $\underline{K}$ eine vollständige Kategorie und $(\underline{C}, \mathcal{C})$ eine algebraische Theorie. Eine (partielle)- $(\underline{C}, \underline{K})$ -Algebra A ist ein Funktor $A : \underline{C} \longrightarrow \underline{K}$, der alle $\mathcal{C}$ -Limites erhält. Mit $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ bezeichne ich die volle Unterkategorie der $(\underline{C}, \underline{K})$ -Algebren in der Kategorie $(\underline{C}, \underline{K})$ aller Funktoren von $\underline{C}$ in $\underline{K}$. Ist $f : \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ ein Theoriemorphismus, so heißt der hierdurch induzierte Funktor

$$\text{Alg}(f, \underline{K}) : \text{Alg}(\underline{D}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$$

ein algebraischer Funktor.

1.3. Beispiele.

1. Jede $\underline{K}$ -Algebra über einer gleichungsdefinierten Theorie im Sinne von Lawvere ([10]) ist eine partielle $\underline{K}$ -Algebra.

2. Jede partielle Birkhoff-Algebra und allgemeiner jede Relationenalgebra ist eine partielle Me-Algebra in der oben definierten Weise.
3. Jede cokommutative Coalgebra ([14]) ist eine partielle Me-Algebra.

§2 Universell-algebraische Kategorien.

2.1. Definition. Eine vollständige Kategorie K heißt universell-algebraisch, falls für jede algebraische Theorie C die algebraische Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ reflektiv in der Kategorie $(\underline{C}, \underline{K})$ ist.

2.2. Beispiele.

1. Die Kategorie Me der Mengen ist universell-algebraisch ([6]).
2. Allgemeiner ist jede Gabrielkategorie universell-algebraisch. Hierbei sind Gabrielkategorien wie folgt definiert ([6], [7], [24]). Seien D eine kleine Kategorie und Σ eine Menge von funktoriellen Morphismen in $(\underline{D}, \underline{Me})$. Die Gabrielkategorie $\Sigma(\underline{D}, \underline{Me})$ ist die volle Unterkategorie derjenigen Funktoren $G \in (\underline{D}, \underline{Me})$, die Σ -linksstetig sind, d.h. für die die Abbildungen $\text{Mor}(\sigma, G) : \text{Mor}(F, G) \longrightarrow \text{Mor}(H, G)$ für jedes $\sigma : H \longrightarrow F \in \Sigma$ bijektiv sind.

Beispiele für Gabrielkategorien sind die algebraischen Kategorien im Sinne von Lawvere (Gruppen, Ringe, Lie-Algebren...), Kategorien von Garben über Grothendiecktopologien, Grothendieckkategorien mit Generatoren, die duale Kategorie der kompakten Räume... Die Kategorie der topologischen

Räume ist dagegen keine Gabrielkategorie (da Top kein Retrakt im Sinne von Gabriel-Isbell ist!).

2.3. Theorem. Sei K eine bivollständige, universell-algebraische Kategorie. Dann gelten folgende Aussagen:

1. Jeder algebraische Funktor ist adjungiert.
2. Jeder Auswertungsfunktor

$$\begin{array}{ccc} V_C : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) & \longrightarrow & \underline{K} \\ A & \longrightarrow & AC, \quad C \in \underline{C} \end{array}$$

ist adjungiert.

Ein coadjungierter Funktor F_C von V_C heißt ein C-freier Funktor, und jedes Objekt $F_C K, K \in \underline{K}$, eine C-freie von K erzeugte (C,K)-Algebra.

Beweis.

Seien K eine bivollständige, universell-algebraische Kategorie und $f : \underline{D} \rightarrow \underline{C}$ ein Theoriemorphismus. Dann besitzt der induzierte Funktor

$$(f, \underline{K}) : (\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow (\underline{D}, \underline{K})$$

nach einem bekannten Satz von Kan einen coadjungierten Funktor S' . Betrachten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (\underline{C}, \underline{K}) & \xrightleftharpoons[(f, \underline{K})]{S'} & (\underline{D}, \underline{K}) \\ R \downarrow & & \uparrow E \\ \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) & \xrightarrow{\text{Alg}(f, \underline{K})} & \text{Alg}(\underline{D}, \underline{K}) \end{array}$$

Bezeichnet R einen Reflektor der Inklusion

$$E : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow (\underline{C}, \underline{K}),$$

dann ist der Funktor $S := RS'E$ ein Coadjungierter des algebraischen Funktors $\text{Alg}(f, \underline{K})$.

Sei nun $\underline{C}$ eine algebraische Theorie, und bezeichne

$$V'_C : (\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \underline{K} : F \longmapsto FC$$

den Auswertungsfunktor auf $C \in \underline{C}$. Da $\underline{K}$ covollständig ist,

besitzt V'_C einen coadjungierten Funktor F'_C .

$$F'_C : \underline{K} \longrightarrow (\underline{C}, \underline{K}) : K \longmapsto F'_C K \quad \text{mit}$$

$$F'_C K(C') := \underline{K}(\underline{C}, \underline{C}') K \quad \text{für jedes } C' \in \underline{C}.$$

Ist R ein Reflektor zur Inklusion E , dann ist

$$F_C := RF'_C \quad \text{coadjungiert zu } V_C.$$

2.4. Bemerkung:

Sei $\underline{K}$ eine bivollständige Kategorie. Ist für jede algebraische Theorie $\underline{C}$ die algebraische Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ covollständig, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $\underline{K}$ ist universell-algebraisch.
- (ii) Jeder algebraische Funktor ist adjungiert.
- (iii) Jeder Auswertungsfunktor

$$V_C : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \underline{K} : A \longmapsto AC$$

ist adjungiert.

§3 Partielle Algebren in Initialkategorien.

In diesem Paragraphen beweise ich die folgenden beiden zentralen Sätze für die Theorie partieller Algebren:

1. Sind $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork und $\underline{C}$ eine algebraische Theorie, so ist

$$F^{\underline{C}} : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$$

ein Initialfunktork.

Hiermit ist die gesamte in Kap. I entwickelte Theorie auf partielle Algebren über Initialkategorien anwendbar.

2. Ist $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork, und ist

$\underline{L}$ universell-algebraisch, so ist auch $\underline{K}$ universell-algebraisch.

3.1. Theorem. Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork.

Dann ist für jede algebraische Theorie $\underline{C}$ der Funktork

$$F^{\underline{C}} : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$$

wieder ein Initialfunktork, und zwar wird die Initialstruktur

auf einem Initialobjekt $D \in \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ elementweise gebildet, d.h.

eine Familie $(D, f_i : F^{\underline{C}}(D) \longrightarrow F^{\underline{C}}(B_i), i \in I)$ ist genau dann

$F^{\underline{C}}$ -initial, wenn alle Familien $(D(C), f_i(C) : F^{\underline{C}}D(C) \longrightarrow F^{\underline{C}}B_i(C); i \in I)$

mit $C \in \underline{C}$ F -initial sind.

Damit erhalten wir folgenden Funktork:

$$\text{Alg}(\underline{C}, -) : \text{Initial}(\underline{L}) \longrightarrow \text{Initial}(\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L}))$$

$$F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L} \longmapsto \text{Alg}(\underline{C}, F) : = F^{\underline{C}} :$$

$$H : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}' \longmapsto \text{Alg}(\underline{C}, H) : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}')$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} \underline{K} & \xrightarrow{H} & \underline{K}' \\ & \searrow F & \swarrow F' \\ & \underline{L} & \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{ccc} \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) & \xrightarrow{\text{Alg}(\underline{C}, H)} & \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}') \\ & \searrow F^{\underline{C}} & \swarrow F'^{\underline{C}} \\ & \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L}) & \end{array} \end{array}$$

Beweis.

Sei $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor. Da F Limites erhält, erhält die Restriktion von $F^{\underline{C}} : (\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow (\underline{C}, \underline{L})$ $\underline{C}$ -Algebren, d.h.

$$F^{\underline{C}} : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L}).$$

Seien nun $B_i, i \in I$, eine Familie von $(\underline{C}, \underline{K})$ -Algebren, D' eine $(\underline{C}, \underline{L})$ -Algebra und $f_i : D' \longrightarrow F^{\underline{C}}(B_i), i \in I$, eine Familie von $(\underline{C}, \underline{L})$ -Algebrenhomomorphismen. Versehen wir den Funktor D' elementweise mit der durch die Familien von $\underline{L}$ -Morphismen $f_i(C) : D'(C) \longrightarrow F^{\underline{C}}B_i(C), i \in I, C \in \underline{C}$, induzierten F -Initialstruktur, so erhalten wir eine Abbildung

$$D : |\underline{C}| \longrightarrow |\underline{K}| : C \longmapsto DC := (D'(C))_{\text{ind}}.$$

Sei nun $f : C \longrightarrow C'$ ein $\underline{C}$ -Morphismus. Betrachten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} F(DC) = D'(C) & \xrightarrow{f_i(C)} & F(B_i C) \\ D'f \downarrow & = & \downarrow FB_i(f) \\ F(DC') = D'(C') & \xrightarrow{f_i(C')} & F(B_i C') \end{array}$$

Da $(DC', f_i(C') : D'(C') \longrightarrow F(B_i C'); i \in I)$ nach Konstruktion F -initial ist, und die $\underline{L}$ -Morphismen $F(B_i f) \circ (f_i(C)) : D'(C) \longrightarrow F(B_i C')$ für alle $i \in I$ F -Morphismen sind, ist $D'f$ ein F -Morphismus.

Damit existiert genau ein $\underline{K}$ -Morphismus

$$Df : DC \longrightarrow DC' \quad \text{mit} \quad F(Df) = D'f.$$

Somit ist D ein Funktor aus $(\underline{C}, \underline{K})$. Ich zeige nun, daß D sogar in $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ liegt. Hierzu müssen wir zeigen, daß D $\mathcal{C}$ -Limites erhält. Sei $\lim_{S_K} \underline{C}$ ein $\underline{C}$ -Limes. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 \lim D'S_k = F^{\underline{C}}_D(\lim S_k) = D'\lim S_k & \xrightarrow{f_i \lim S_k} & F^{\underline{C}}_{B_i}(\lim S_k) = \lim F^{\underline{C}}_{B_i} S_k \\
 \downarrow D'p_k & = & \downarrow F^{\underline{C}}_{B_i}(p_k) \\
 F^{\underline{C}}_D(S_k) = D'S_k & \xrightarrow{f_i S_k} & F^{\underline{C}}_{B_i}(S_k)
 \end{array}$$

Mit $p_k : \lim S_k \rightarrow S_k$ bezeichne ich hierin die kanonischen Projektionen. Da die Konstruktion von Initialstrukturen transitiv ist, trägt das $\underline{K}$ -Objekt $D\lim S_k$ auf $D'\lim S_k$ die durch die Familie von $\underline{L}$ -Morphismen

$$D'\lim S_k \longrightarrow F^{\underline{C}}_{B_i}(\lim S_k) \longrightarrow F^{\underline{C}}_{B_i}(S_k), i \in I, k \in K,$$

induzierte F -Initialstruktur. Da das Diagramm für alle $i \in I$ und $k \in K$ kommutativ ist, trägt somit $D\lim S_k$ auf $D'\lim S_k$ die durch folgende Familie von $\underline{L}$ -Morphismen induzierte F -Initialstruktur.

$$D'\lim S_k \longrightarrow D'S_k \longrightarrow F^{\underline{C}}_{B_i}(S_k), i \in I, k \in K.$$

Aufgrund der Transitivität von Initialstrukturen trägt $D\lim S_k$ somit auf $D'\lim S_k$ die durch die Projektionen

$$D'p_k : D'\lim S_k \longrightarrow D'S_k = F(DS_k)$$

induzierte F -Initialstruktur. Damit gilt aber nach Proposition 3.1

in Kap. I : $D\lim S_k = \lim(DS_k)$, d.h. D ist eine $(\underline{C}, \underline{K})$ -Algebra.

Seien nun $G \in \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ und $t : F^{\underline{C}}_G \rightarrow F^{\underline{C}}_D$ ein funktorieller

Morphismus. Für alle $i \in I$ sei $f_i : F^{\underline{C}}_G \rightarrow F^{\underline{C}}_{B_i}$ jeweils ein

$F^{\underline{C}}$ -Morphismus. Wir müssen zeigen, daß damit auch t ein

$F^{\underline{C}}$ -Morphismus ist. Da D elementweise die durch die $\underline{L}$ -Morphismen

$f_i : F(DC) \rightarrow F(B_i C)$ induzierte F -Initialstruktur trägt, erhalten wir aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc}
 F(B_i C) & \xleftarrow{f_i C} & F(DC) \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & F(GC)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \\ \\ tC \end{array}$$

eine Familie $(t'C : GC \longrightarrow DC; C \in \underline{C})$ von $\underline{K}$ -Morphismen mit $F(t'C) = tC$. Da F ein treuer Funktor ist folgt unmittelbar, daß t' ein funktorieller Morphismus ist. $F^{\underline{C}}$ ist offensichtlich ein treuer Funktor. $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ ist $F^{\underline{C}}$ -klein, da $\underline{C}$ eine kleine Kategorie und $\underline{K}$ F -klein ist.

3.2. Bemerkungen.

- Die Cointialstruktur auf $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ ist im allgemeinen nicht die durch $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ elementweise induzierte Cointialstruktur, wie folgendes Beispiel zeigt ([49]). Seien $\underline{C}$ die algebraische Theorie der Vektorräume über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, und $F : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{\text{Top}}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{\text{Me}})$ der kanonische Vergißfunktor. Sei $X := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und $I := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 ; (\alpha, \beta) \neq (0, 0)\}$. Für jedes Paar $(\alpha, \beta) \in I$ seien $X_{\alpha\beta} := \mathbb{C}$ mit der natürlichen Topologie, $f_{\alpha\beta} : \mathbb{C} \longrightarrow X : f_{\alpha\beta}(t) := (\alpha t, \beta t)$, also $f_{\alpha\beta}(\mathbb{C})$ eine Gerade in X und $X = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I} f_{\alpha\beta}(\mathbb{C})$. Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann offen für die Cointialtopologie γ von X bzgl. $(f_{\alpha\beta} ; (\alpha, \beta) \in I)$ wenn $f^{-1}(A)$ für alle $(\alpha, \beta) \in I$ offen in $\mathbb{C}$ ist. Bezeichnet B eine nichtleere offene Menge in $\mathbb{C}$, die die Null nicht enthält, so ist also $B \times \{0\}$ offen bzgl. γ . γ ist separiert, aber keine lineare Topologie auf X , da nach einem bekannten Satz jeder separierte lineare Raum X über $\mathbb{C}$ mit Dimension $n < \infty$ topologisch isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist. Die Konstruktion ist aber gerade so gewählt, daß $(X, \gamma) \neq \mathbb{C}^2$ ist.
- Die Cointialstruktur auf $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ läßt sich folgendermaßen explizit angeben (vgl. [48]). Seien $A, B \in \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ und $f : A \longrightarrow B$.

ein funktorieller Morphismus. Sei $C \in \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ mit $F^C C = B$.

Dann bezeichne ich mit $SfC = A_{\text{ind}}$ das durch

$f : A \longrightarrow F^C C = B$ induzierte F^C -Initialobjekt auf A .

Seien $K_i, i \in I$, eine Familie von $(\underline{C}, \underline{K})$ -Algebren, L eine

$(\underline{C}, \underline{L})$ -Algebra und $f_i : F^C K_i \longrightarrow L, i \in I$, eine Familie

von $(\underline{C}, \underline{L})$ -Algebrenhomomorphismen. Dann ist

$$L^{\text{ind}} = \bigwedge_{i \in I} \bigvee \{ K \in F^{C-1} L; Sf_i K < K_i \}$$

das durch $(f_i : F^C K_i \longrightarrow L; i \in I)$ induzierte F^C -Cointialobjekt.

Aus den Ergebnissen aus Kap. I erhalten wir das

3.3. Theorem. Seien $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor und

$\underline{C}$ eine partiell-algebraische Theorie. Dann gelten

folgende Aussagen:

1. $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ -Limites ($\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ -Colimites) werden, sofern sie existieren, in $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ gebildet und mit der durch die Projektionen (Injektionen) induzierten F^C -Initialstruktur (F^C -Cointialstruktur) versehen.
2. $F^C : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ besitzt einen adjungierten und einen coadjungierten Funktor. Insbesondere erhält F^C Limites und Colimites.
3. $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ ist vollständig und lokal klein. Ist $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ covollständig und lokal eklein, so gilt das Gleiche für $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$.
4. F^C erhält und reflektiert Monomorphismen und Epimorphismen.
5. $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ besitzt genau dann einen Generator bzw. Cogenerator, wenn $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ jeweils einen besitzt.
6. $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ ist genau dann eine (Cokern, Mono)-Bikategorie, wenn $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ eine (Cokern, Mono)-Bikategorie ist.

3.4. Theorem. Seien $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktor und $\underline{L}$ eine universell-algebraische Kategorie. Dann ist $\underline{K}$ universell-algebraisch.

Beweis. Ich verwende hierzu den Hauptsatz für adjungierte Funktoren. Seien $(\underline{C}, \mathcal{L})$ eine algebraische Theorie, $A \in (\underline{C}, \underline{K})$, $B \in \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ zwei Funktoren, und $f : A \rightarrow B$ ein funktorieller Morphismus. Mit $R : (\underline{C}, \underline{L}) \rightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ bezeichne ich einen Reflektor der Inklusion $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L}) \rightarrow (\underline{C}, \underline{L})$. Sei $F^{\underline{C}} : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \rightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ der durch $F : \underline{K} \rightarrow \underline{L}$ kanonisch induzierte Funktor. Damit kann in $(\underline{C}, \underline{L})$ der Morphismus $F^{\underline{C}}_f : F^{\underline{C}}A \rightarrow F^{\underline{C}}B$ über die Reflexion $r : F^{\underline{C}}A \rightarrow RF^{\underline{C}}A$, $RF^{\underline{C}}A \in \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$, faktorisiert werden.

$$\begin{array}{ccc}
 F^{\underline{C}}A & \xrightarrow{F^{\underline{C}}_f} & F^{\underline{C}}B \\
 \downarrow r & \searrow (F^{\underline{C}}_f)^* & \\
 RF^{\underline{C}}A & &
 \end{array}$$

Versehen wir die $(\underline{C}, \underline{L})$ -Algebra $RF^{\underline{C}}A$ mit der durch

$$(F^{\underline{C}}_f)^* : RF^{\underline{C}}A \rightarrow F^{\underline{C}}B$$

induzierten $F^{\underline{C}}$ -Initialstruktur, so erhalten wir eine Faktorisierung von f über $(RF^{\underline{C}}A)_{\text{ind}}$.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow & \searrow & \\
 (RF^{\underline{C}}A)_{\text{ind}} & &
 \end{array}$$

Da die Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ $F^{\underline{C}}$ -klein ist, ist die Klasse aller $(\underline{C}, \underline{K})$ -Algebren A' mit $F^{\underline{C}}A' = RF^{\underline{C}}A$ bis auf Isomorphie eine Lösungsmenge.

3.5. Beispiele.

Da jede Gabrielkategorie universell-algebraisch ist, ist somit auch jede Initialkategorie über einer Gabrielkategorie universell-algebraisch. Insbesondere ist jede Initialkategorie über der Kategorie Me der Mengen universell-algebraisch.

Insbesondere ist somit z.B. jede coreflektive Unterkategorie der Kategorie der topologischen oder der uniformen Räume universell-algebraisch, da jede coreflektive Unterkategorie in Top oder Unif eine Initialkategorie über Me ist.

§4 Partielle Algebren in Unterkategorien von Initialkategorien.

Seien $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ ein Initialfunktork und $\underline{C}$ eine algebraische Theorie. Da $F^{\underline{C}} : \text{Alg}(\underline{C}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$ wieder ein Initialfunktork ist, gelten sämtliche Charakterisierungssätze für Unterkategorien, die in Kap I, §4, bewiesen wurden, auch für $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$. Diese Sätze liefern selbst im Falle der Identität $\text{Id} : \underline{L} \longrightarrow \underline{L}$, die trivialerweise ein Initialfunktork ist, nichttriviale Aussagen für $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{L})$, wie z.B.: Die Kategorie Ab der abelschen Gruppen ist epirefektiv in der Kategorie aller Gruppen, da Ab gegen Produkte und Untergruppen abgeschlossen ist. Der Reflektor hierzu ist bekanntlich der Funktork "Kommutatorfaktorgruppe".

Ich betrachte nun im folgenden partielle Algebren in Unterkategorien von Initialkategorien.

4.1. Definition. Eine vollständige Kategorie K heißt algebraisch lokal coklein, wenn für jede algebraische Theorie C die Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ der $(\underline{C}, \underline{K})$ -Algebren lokal coklein ist.

4.2. Beispiele.

1. Jede Gabrielkategorie ist algebraisch lokal coklein ([7], [24]).
2. Nach Theorem 3.3.3 ist jede Initialkategorie über einer Gabrielkategorie, insbesondere jede Initialkategorie über Me, algebraisch lokal coklein.

4.3. Theorem. Seien $F : K \rightarrow L$ ein Initialfunktor und $\underline{U}$ eine PIU-Unterkategorie von K .
Ist L universell-algebraisch und algebraisch lokal coklein, so gelten folgende Aussagen:

1. $\underline{U}$ ist universell-algebraisch.
2. Ist $\underline{C}$ eine algebraische Theorie, so ist $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{U})$ eine PIU-Unterkategorie von $\text{Alg}(\underline{C}, K)$. Damit ist $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{U})$ epirefektiv in $\text{Alg}(\underline{C}, K)$.

Beweis. Seien $A \in (\underline{C}, \underline{U})$, $B \in \text{Alg}(\underline{C}, \underline{U})$ und $f : A \rightarrow B$ ein funktorieller Morphismus. Da $\underline{U}$ universell-algebraisch ist, faktorisiert der Morphismus $F^{\underline{C}}_f : F^{\underline{C}}_A \rightarrow F^{\underline{C}}_B$ über die Reflexion $r : F^{\underline{C}}_A \rightarrow RF^{\underline{C}}_A$:

$$F^{\underline{C}}_f : (F^{\underline{C}}_A \xrightarrow{r} RF^{\underline{C}}_A \xrightarrow{(F^{\underline{C}}_f)^*} F^{\underline{C}}_B)$$

Da die Kategorie $\text{alg}(\underline{C}, \underline{U})$ vollständig und lokal klein ist, besitzt jeder $(\underline{C}, \underline{U})$ -Algebrenhomomorphismus in $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{U})$ eine (Epi, Mono)-Faktorisierung. Damit erweitert sich die obige Faktorisierung von $F^{\underline{C}}_f$ in folgender Weise:

$$\begin{array}{ccc} F^{\underline{C}}_A & \xrightarrow{F^{\underline{C}}_f} & F^{\underline{C}}_B \\ r \downarrow & \nearrow (F^{\underline{C}}_f)^* & \uparrow m \\ RF^{\underline{C}}_A & \xrightarrow{e} & D' \end{array}$$

Versehen wir D' mit der durch $m : D' \rightarrow F^{\underline{C}}_B$ induzierten $F^{\underline{C}}$ -Initialstruktur, so erhalten wir eine Faktorisierung von f über eine $(\underline{C}, K)$ -Algebra D , die in $\text{alg}(\underline{C}, \underline{U})$ liegt, da m elementeweise ein Monomorphismus ist und damit eine Einbettung impliziert. Die Klasse aller $(\underline{C}, \underline{U})$ -Algebren A^+ , deren Bilder unter $F^{\underline{C}}$ in der Klasse aller epimorphen Bilder

von $\text{RF}^{\underline{C}}_{\underline{A}}$ liegen, ist bis auf Isomorphie eine Lösungsmenge.

Damit ist $\underline{U}$ universell-algebraisch.

Nach Konstruktion der Produkte und Initialunterobjekte in $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ ist $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{U})$ offensichtlich eine PIU-Unterkategorie von $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$ und damit epirefektiv.

4.4. Beispiele und Bemerkungen.

1. Jede epireflektive Unterkategorie einer Initialkategorie über $\underline{M}_e$ ist universell-algebraisch.

2. Jede epireflektive Unterkategorie in der Kategorie der lokal konvexen Räume ist universell-algebraisch.

Die Aussage 2 in Theorem 4.3 enthält zahlreiche Konstruktionen, wie z.B. vollständige Regularisierungen oder T_1 -Vervollständigungen ($i = 0, 1, 2, 3$) von topologischen partiellen Algebren, wie folgender Satz zeigt:

3. Seien $\underline{U}$ eine epireflektive Unterkategorie einer Initialkategorie $\underline{K}$ über $\underline{M}_e$ und $\underline{C}$ eine algebraische Theorie. Dann ist die Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{U})$ epirefektiv in $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$.

Ohne Beweis sei noch folgende Proposition angegeben

4.5. Proposition. Sei $\underline{U}$ eine reflektive, universell-algebraische Unterkategorie einer vollständigen Kategorie $\underline{K}$. Dann ist für jede algebraische Theorie $\underline{C}$ die Kategorie $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{U})$ reflektiv in $\text{Alg}(\underline{C}, \underline{K})$.

§5 Gleichungsdefinierte Algebren in Initialkategorien.

In diesem Paragraphen betrachte ich speziell Algebren über gleichungsdefinierten Theorien im Sinne von Lawvere. Eine gleichungsdefinierte (r -stellige) Theorie ist also ein Paar $(\underline{A}, A)$ einer Kategorie $\underline{A}$ und eines Funktors

$$A : \underline{\text{Me}}(r)^{\text{op}} \longrightarrow \underline{A}, \text{ der}$$

1. Produkte erhält und
2. bijektiv auf den Objekten ist.

Hierbei bezeichnet r eine reguläre (unendliche) Kardinalzahl und $\underline{\text{Me}}(r)$ die volle Unterkategorie von $\underline{\text{Me}}$, deren Objekte diejenigen Kardinalzahlen sind, die echt kleiner als r sind. Einfachheitshalber sei nun im folgenden $\underline{K}$ stets eine Initialkategorie über $\underline{\text{Me}}$. Die auftretenden gleichungsdefinierten Theorien seien sämtlich r -stellig für ein festes r . Damit erhalten wir aus §3 das folgende Theorem:

5.1. Theorem. Seien $\underline{K}$ eine Initialkategorie und $\underline{A}$ eine gleichungsdefinierte algebraische Theorie. Dann gilt Folgendes:

1. Der Einbettungsfunktor

$$E : \text{Alg}(\underline{A}, \underline{K}) \longrightarrow (\underline{A}, \underline{K}) \text{ ist monadisch.}$$

2. Jeder $\underline{K}$ -algebraische Funktor ist monadisch.

3. Der Vergißfunktor

$$V : \text{Alg}(\underline{A}, \underline{K}) \longrightarrow \underline{K} : A \longrightarrow A(1) \text{ ist monadisch.}$$

4. Der Vergißfunktor $V^{\underline{A}} : \text{Alg}(\underline{A}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{A}, \underline{\text{Me}})$

ist ein Initialfunktor. $V^{\underline{A}}$ besitzt damit einen adjungierten und einen coadjungierten Funktor.

5. $\text{Alg}(\underline{A}, \underline{K})$ ist vollständig, covollständig, lokal klein und lokal coklein.

Beweis. Aufgrund der Ergebnisse von Kap. II, §3 müssen wir nur noch die Monadizität der adjungierten Funktoren in den Aussagen 1, 2, und 3 nachweisen. Diese folgt aber aus der

5.2. Proposition. Sei $\underline{K}$ eine vollständige und covollständige Kategorie. Ist $\underline{K}$ für alle gleichungsdefinierten Theorien universell-algebraisch (gleichungsdefiniert universell-algebraisch) dann sind die Vergißfunktoren für alle gleichungsdefinierten Theorien $\underline{A} : \underline{V}_{\underline{A}} : \text{Alg}(\underline{A}, \underline{K}) \longrightarrow \underline{K}$ monadisch.

Beweis.

Seien $f, g : A \rightrightarrows B$ ein $\underline{V}_{\underline{A}}$ -zusammenziehbares Paar in $\text{Alg}(\underline{A}, \underline{K})$ und $i(1) : B(1) \longrightarrow C(1)$ ein Differenzcokern von $f(1), g(1)$ in $\underline{K}$. Dann ist

$$A(1) \begin{array}{c} \xrightarrow{f(1)} \\ \xrightarrow{g(1)} \end{array} B(1) \xrightarrow{i(1)} C(1)$$

ein zusammenziehbarer Differenzcokern in $\underline{K}$, und es existieren $\underline{K}$ -Morphismen $A(1) \xleftarrow{h(1)} B(1) \xleftarrow{k(1)} C(1)$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccccc}
 B(1) & & \xrightarrow{\text{id}} & & B(1) \\
 & \searrow h(1) & & \nearrow f(1) & \\
 & & A(1) & & \\
 & & \downarrow g(1) & & \\
 & & B(1) & & \\
 i(1) \downarrow & \nearrow k(1) & & \searrow i(1) & \downarrow i(1) \\
 C(1) & & \xrightarrow{\text{id}} & & C(1)
 \end{array}$$

Damit ist aber für $n < r$

$$A(n) \begin{array}{c} \xrightarrow{f(n)} \\ \xrightarrow{g(n)} \end{array} B(n) \xrightarrow{i(1)^n} C(1)^n$$

ein zusammenziehbarer Differenzcokern.

Sei nun $a \in \underline{A}(n,1)$ eine n -stellige Operation. Dann existiert ein eindeutig bestimmter $\underline{K}$ -Morphismus $C(a)$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \underline{A}(n) & \xrightarrow{\quad} & \underline{B}(n) & \xrightarrow{\quad} & C(1)^n \\ \downarrow A(a) & & \downarrow B(a) & & \downarrow C(a) \\ \underline{A}(1) & \xrightarrow{\quad} & \underline{B}(1) & \xrightarrow{\quad} & C(1) \end{array}$$

kommutativ ist. Damit ist der Funktor

$$C : \underline{A} \longrightarrow \underline{K} : \begin{cases} n \longmapsto C(1)^n \\ a \longmapsto C(a) \end{cases}$$

ein Differenzcokern von f, g , und $V_{\underline{A}}$ erzeugt Differenzcokerne von $V_{\underline{A}}$ -zusammenziehbaren Paaren. Da $V_{\underline{A}}$ nach Kap II, Theorem 2.3.2 adjungiert ist, ist $V_{\underline{A}}$ monadisch.

Sei $\text{Alg}(f, \underline{K}) : \text{Alg}(\underline{A}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Alg}(\underline{B}, \underline{K})$ ein algebraischer Funktor.

Da das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Alg}(\underline{A}, \underline{K}) & \xrightarrow{\text{Alg}(f, \underline{K})} & \text{Alg}(\underline{B}, \underline{K}) \\ & \searrow V_{\underline{A}} \quad \quad \quad \swarrow V_{\underline{B}} & \\ & \underline{K} & \end{array}$$

kommutativ ist, und da $V_{\underline{A}}$ und $V_{\underline{B}}$ monadisch sind, erzeugt $\text{Alg}(f, \underline{K})$ Differenzcokerne von $\text{Alg}(f, \underline{K})$ -zusammenziehbaren Paaren, ist also selbst monadisch. Da jede strikt volle reflektive Unterkategorie einer Kategorie monadisch ist, ist somit alles bewiesen.

Sei $\underline{K}$ eine Initialkategorie. Ein Objekt $K \in \underline{K}$ heißt endlich, wenn V_K in Me endlich ist. Ist $F : \underline{K} \longrightarrow \text{Alg}(\underline{A}, \underline{K})$ ein freier Funktor, so heißt $F(K)$ eine endlich erzeugte freie $(\underline{A}, \underline{K})$ -Algebra,

und jedes epimorphe Bild hiervon eine endlich erzeugte
 (A, K) -Algebra.

5.3. Theorem. Sei K eine Initialkategorie, und sei A eine
gleichungsdefinierte algebraische Theorie. Dann gilt:

1. $\text{Alg}(A, K)$ besitzt einen endlich erzeugten freien Generator.
2. $\text{Alg}(A, K)$ besitzt genau dann einen Cogenerator, wenn
 $\text{Alg}(A, \text{Me})$ einen Cogenerator besitzt.

Beweis. Seien $D : \text{Me} \rightarrow K$ ein zum Vergißfunktor $V : K \rightarrow \text{Me}$
coadjungierter Funktor und 1 ein einelementiger Generator
in Me . Dann ist $D1$ ein endlicher Generator in K . Ist $F : K \rightarrow \text{Alg}(A, K)$
ein freier Funktor, so ist $F(D1)$ in $\text{Alg}(A, K)$ ein endlich erzeugter
Generator.

Das nächste Theorem liefert das genaue Pendant zum
Homomorphiesatz für Algebren über Mengen.

5.4. Theorem. Seien K eine Initialkategorie und A eine
gleichungsdefinierte algebraische Theorie. Dann gelten
die folgenden Aussagen:

1. $\text{Alg}(A, K)$ ist eine $(\text{Cokern}, \text{Mono})$ -Bikategorie, und zwar
besitzt jeder (A, K) -Algebrenhomomorphismus $f : A \rightarrow B$
eine kanonische $(\text{Cokern}, \text{Mono})$ -Faktorisierung

$$f : (A \rightarrow Q(f) \xrightarrow{m} B),$$

die auf den unterliegenden Algebren in $\text{Alg}(A, \text{Me})$ die
kanonische Faktorisierung über die Quotientenalgebra
darstellt.

2. Bezeichnet fA das epimorphe Bild von A unter f , so ist
der Bimorphismus $m : Q(f) \rightarrow fA$ genau dann ein Isomorphismus,
wenn der Epimorphismus $f : A \rightarrow fA$ ein Cokern ist (Homomorphie-
satz)

§6 Gleichungsdefinierte Coalgebren in Initialkategorien.

Da der Begriff einer Initialkategorie selbstdual ist, ist mit $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{L}$ auch $F^{op} : \underline{K}^{op} \longrightarrow \underline{L}^{op}$ ein Initialfunktork. Da nun die Algebren $A : \underline{A} \longrightarrow \underline{K}^{op}$ genau die $\underline{A}$ -Coalgebren in $\underline{K}$ sind, lassen sich unsere Ergebnisse sofort auf Coalgebren anwenden, d.h. insbesondere : Gelten die zentralen Sätze der universellen Algebra für Coalgebren in $\underline{L}$, dann gelten sie auch für Coalgebren in $\underline{K}$.

6.1. Theorem. Seien $\underline{A}$ eine gleichungsdefinierte algebraische Theorie, so gilt:

Der Einbettungsfunktor $E : \text{Coalg}(\underline{A}, \underline{Me}) \longrightarrow (\underline{A}^{op}, \underline{Me})$ ist comonadisch, mit $\text{Coalg}(\underline{A}, \underline{Me}) : = \text{Alg}(\underline{A}, \underline{Me}^{op})^{op}$ der Kategorie der $\underline{A}$ -Coalgebren und $\underline{A}$ -Coalgebrenhomomorphismen.

Beweis. Isbell hat vor kurzem bewiesen (unveröffentlicht), daß für jede r-algebraische Theorie $\underline{A}$ der Vergißfunktork

$$\vee_{\underline{A}} : \text{Alg}(\underline{A}, \underline{Me}^{op}) \longrightarrow \underline{Me}^{op} : A \longmapsto A1$$

monadisch ist. Seien $T = (T, e, m)$ die zugehörige Monade und

$f : (A, a) \longrightarrow (B, b)$ ein Morphismus von $\underline{Me}^{op}$ -Algebren.

Dann existiert, wie ich zeigen werde, in $(\underline{Me}^{op})^T = \text{Alg}(\underline{A}, \underline{Me}^{op})$ eine kanonische Faktorisierung von f , so daß diese Faktorisierung auf den unterliegenden Mengen eine $(\text{Epi}, \text{Mono})^\perp$ -Faktorisierung von f in $\underline{Me}^{op}$ ist.

$$\begin{array}{ccc} (A, a) & \xrightarrow{f} & (B, b) \\ \text{Epi } g \downarrow & \searrow \text{h Mono} & \\ (C, c) & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}$$

O.E.d.A. können wir annehmen, daß $B \neq \emptyset$ ist. Sei nun

$f = hg : A \longrightarrow C \longrightarrow B$ die (Epi, Mono)-Faktorisierung von f in $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$. Da in $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$ jeder Monomorphismus ein Schnitt ist, existiert ein $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$ -Morphismus $k : B \longrightarrow C$, so daß $kh = \text{id}$ gilt. Dann ist mit $c := kBTb$ das Paar (C, c) eine $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$ -Algebra.

Die Morphismen g und h sind Algebrenhomomorphismen,

und $f = hg$ ist die gewünschte (Epi, Mono)-Faktorisierung von f in $(\underline{\text{Me}}^{\text{OP}})^T$. Seien nun $F^T : \underline{\text{Me}}^{\text{OP}} \longrightarrow (\underline{\text{Me}}^{\text{OP}})^T$ der freie T -Algebrenfunktor, U ein $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$ -Unterobjekt von B , wobei

(B, b) eine Coalgebra ist, und $f : F^T U \longrightarrow (B, b)$

der durch den Morphismus $U \longrightarrow B$ induzierte Algebrenhomomorphismus.

Die (Epi, Mono)-Faktorisierung von f auf den unterliegenden Mengen induziert uns eine (Epi, Mono)-Faktorisierung von f in $(\underline{\text{Me}}^{\text{OP}})^T$.

$$\begin{array}{ccc} F^T U & \xrightarrow{f} & (B, b) \\ \text{Epi } g \downarrow & \searrow \text{h Mono} & \\ (C, c) & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \text{=} \end{array}$$

Bezeichnet $e : \text{Id} \longrightarrow T$ die Einheit der Monade, so ist der $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$ -Morphismus $g(eU) : U \longrightarrow TU \longrightarrow C$

ein Monomorphismus. Damit enthält die Algebra (C, c) die Menge U .

Da sich f über jede Unter algebra, die U enthält, faktorisiert,

und (C, c) als epimorphes Bild die kleinste Unter algebra von (B, b) ist, über die f faktorisiert werden kann, ist

(C, c) die kleinste $(A, \underline{\text{Me}}^{\text{OP}})$ -Unter algebra von (B, b) , die U enthält. Damit ist (C, c) die von U in (B, b) erzeugte $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$ -Algebra.

Sei nun X ein Unterobjekt von C in $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$, und sei $g : TX \longrightarrow C$

ein $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$ -Epimorphismus. Dann existiert auf C höchstens eine $\underline{\text{Me}}^{\text{OP}}$ -

Algebrenstruktur c , so daß $g : F^{\text{TX}} = (TX, m_X) \longrightarrow (C, c)$ ein Algebrenhomomorphismus ist.

Um dies zu beweisen, können wir wieder o.E. annehmen, daß $C \neq \emptyset$, denn andernfalls ist die Behauptung trivial.

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{TTX} & \xrightarrow{Tg} & \text{TC} \\ m_X \downarrow & = & \downarrow c \\ \text{TX} & \xrightarrow{c} & C \end{array}$$

folgt die Eindeutigkeit von c , da mit g auch Tg eine Retraktion ist. Da $\underline{\text{Me}}^{\text{op}}$ lokal coklein ist, ist die Klasse der von einer Menge erzeugten $\underline{\text{Me}}^{\text{op}}$ -Algebren bis auf Isomorphie eine Menge. Seien nun $A \in (\underline{A}, \underline{\text{Me}}^{\text{op}})$, $B \in \text{Alg}(\underline{A}, \underline{\text{Me}}^{\text{op}})$ und $f : A \longrightarrow B$ ein funktorieller Morphismus. Da $(\underline{A}, \underline{\text{Me}}^{\text{op}})$ lokal klein und vollständig ist, besitzt f eine (Epi, Mono)-Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \text{Epi } g \downarrow & = & \nearrow \text{Mono } h \\ \text{Bif} & & \end{array}$$

die sich über die von Bif in B erzeugte $\underline{A}$ -Algebra $\langle \text{Bif} \rangle_B^{\underline{\text{Me}}^{\text{op}}}$ erweitern läßt.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ \text{Bif} & \longrightarrow & \langle \text{Bif} \rangle_B^{\underline{\text{Me}}^{\text{op}}} \end{array}$$

$$\langle \text{Bif} \rangle_B^{\underline{\text{Me}}^{\text{op}}} = \bigcap \left\{ U \in \text{Alg}(\underline{A}, \underline{\text{Me}}^{\text{op}}), A \subset U \subset B \right\}$$

Hierbei bezeichnet der Durchschnitt $\bigcap$ das verallgemeinerte Faserprodukt der Monomorphismen $U \longrightarrow E$. Da $(\underline{A}, \underline{\text{Me}}^{\text{op}})$ lokal coklein

ist, und die Klasse der von einer Menge erzeugten

$(\underline{A}, \underline{Me}^{\text{op}})$ -Algebren bis auf Isomorphie eine Menge ist, ist für alle $A \in (\underline{A}, \underline{Me}^{\text{op}})$ die Klasse

$$L(A) := \{ \langle \text{Bif} \rangle_{\underline{B}}^{\underline{Me}^{\text{op}}}, B \in \text{Alg}(\underline{A}, \underline{Me}^{\text{op}}), f : A \longrightarrow B \}$$

bis auf Isomorphie eine Lösungsmenge. Damit ist aber die

Inklusion $\text{Alg}(\underline{A}, \underline{Me}^{\text{op}}) \longrightarrow (\underline{A}, \underline{Me}^{\text{op}})$ monadisch.

Somit ist schließlich der Einbettungsfunktor

$$E : \text{Coalg}(\underline{A}, \underline{Me}) = \text{Alg}(\underline{A}, \underline{Me}^{\text{op}})^{\text{op}} \longrightarrow (\underline{A}^{\text{op}}, \underline{Me})$$

comonadisch.

Hieraus folgt zusammen mit den Sätzen aus §5 das

6.2. Theorem. Seien $\underline{K}$ eine Initialkategorie (über $\underline{Me}$) und $\underline{A}$ eine gleichungsdefinierte algebraische Theorie. So gelten die folgenden Aussagen:

1. Der Einbettungsfunktor

$$E : \text{Coalg}(\underline{A}, \underline{K}) \longrightarrow (\underline{A}^{\text{op}}, \underline{K})$$

ist comonadisch.

2. Jeder $\underline{K}^{\text{op}}$ -algebraische Funktor ist comonadisch.

3. Der Vergißfunktor

$$V_{\underline{A}} : \text{Coalg}(\underline{A}, \underline{K}) \longrightarrow \underline{K}$$

ist comonadisch.

4. Der Vergißfunktor

$$V_{\underline{A}} : \text{Coalg}(\underline{A}, \underline{K}) \longrightarrow \text{Coalg}(\underline{A}, \underline{Me})$$

ist ein Initialfunktor.

5. $\text{Coalg}(\underline{A}, \underline{K})$ ist vollständig, covollständig und lokal coklein.

Damit existieren z.B. freie topologische (meßbare, uniforme...)

Coalgebren, topologische Cotensorerweiterungen, oder Cogrundring-
erweiterungen.....

Bibliographie

- 1 Antoine, P.: Extension minimale de la categorie des espaces topologiques. Compt.Rend. Acad. Sci. Paris. 262, 1389 - 1392, 1966.
- 2 Bourbaki, N.: Theorie des ensembles, Chap.4, Paris. Hermann, 1970.
- 3 Davis, R.: Universal coalgebra and categories of transition-systems. Mathematical Systems Theory, Vol.4, No.1, 1970.
- 4 Felscher, W.: Birkhoffsche und kategorische Algebra. Math. Ann., 180, 1 - 25, 1969.
- 5 Floret, K., Wloka, J.: Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume. Lecture Notes in Mathematics, 56 Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1968.
- 6 Gabriel, P.: Catégories algébriques. Manuskript, Universität Straßburg, 1966.
- 7 Gabriel, P., Ulmer, F.: Lokal präsentierbare Kategorien. Lecture Notes in Mathematics, 221, Berlin, Heidelberg New York, Springer, 1971.
- 8 Isbell, I.R.: Natural sums and abelianizing. Pacific J. Math., vol.14, 1265 - 1281, 1964.
- 9 Kelley, I.L., Namioka, I.: Linear topological spaces. Princeton, D. van Nostrand Comp. Inc., 1963.
- 10 Kennison, J.F.: A note on reflection maps. Illinois J. Math., 11, 404 - 409, 1967.
- 11 Lawvere, F.W.: Functorial semantics of algebraic theories. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 50, 869 - 872, 1963.
- 11a Herrlich, H., Strecker, G.: Coreflective Subcategories. Trans. Amer. Math. Soc. 118, 303 - 315, 1971

- 12 Lawvere, F.W.: Algebraic theories, algebraic categories,
and algebraic functors. Symposium on the theory
of models. Amsterdam, North Holland, 1965.
- 13 Linton, F.E.: Some aspects of equational categories in:
Proceedings of the conference on categorical
algebra. La Jolla, 1965. Berlin, Heidelberg,
New York, Springer, 1966.
- 14 Mac Lane, S.: Categorical algebra. Bull. Am. Math. Soc.,
71, 40 - 106, 1965.
- 15 Mac Lane, S.: Kategorien. Berlin, Heidelberg, New York,
Springer, 1972.
- 16 Moore, H.G.: Free algebra structure: categorical algebras.
Bull. Austral. Math. Soc., vol. 3, 207 - 215, 1970.
- 17 Pareigis, B.: Kategorien und Funktoren. Stuttgart,
Teubner, 1969.
- 18 Roberts, J.E.: A characterization of initial functors.
Journal of algebra, 8, 181 - 193, 1968.
- 19 Roelke, W.: Topologische lineare Räume II.
Vorlesungsausarbeitung. Universität München, 1969.
- 20 Schubert, H.: Kategorien. Berlin, Heidelberg, New York,
Springer, 1970.
- 21 Schuhmacher, D.: Zur Existenz freier Algebren einer
r-dimensionalen Theorie. Manuscripta math., 3,
227 - 236, 1970.
- 22 Sonner, J.: Canonical categories in: Proceedings of the
conference on categorical algebra. La Jolla, 1965.
Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1966.

- 23 Volger, H.: Über die Existenz von freien Algebren.
Math. Zeitschr., 106, 312 - 320, 1968.
- 24 Wischnewsky, M.: Algebren und Coalgebren in Initial-
und Gabrielkategorien. Diplomarbeit, Universität
München, 1971.

Lebenslauf

Am 26. September 1944 wurde ich, Manfred Wischnewsky, als Sohn des Kriminaloberkommissars Eduard Wischnewsky und dessen Ehefrau Frieda, geb. Neukam, in Garmisch-Partenkirchen geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule und der Oberschule legte ich am Albert-Einsteingymnasium (früher Neues Realgymnasium) in München 1965 das Abitur ab. Anschließend leistete ich meinen Wehrdienst. Vom Sommersemester 1967 bis heute studierte ich an der Universität München Mathematik und Physik. Im August 1971 legte ich hier die Diplomhauptprüfung in Mathematik ab.

Seit 1968 bin ich als Hilfsassistent am Mathematischen Institut der Universität München beschäftigt. Ich korrigierte hierbei Übungen zur Zahlentheorie, Algebra, linearen Algebra, algebraischen Topologie, sowie zur Topologie.

Am 27. August 1971 heiratete ich Fräulein Dipl.-Sozw. Barbara Bützer.

Seit dem 1. Januar 1972 bin am Mathematischen Institut der Universität München als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten tätig.

